Álgebra Lineal
Problemas resueltos

Mª Isabel García Planas

Primera edición: septiembre de 1993
Segunda edición: septiembre de 1994

Diseño de la cubieta: Antoni Gutiérrez

Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
e-mail: edicions-upc@upc.es

Producción: Servei de Publicacions de la UPC
y CPDA
AV. Diagonal 647, ETSEIB. 08028 Barcelona

Depósito legal: B-22.363-93
ISBN: 84-7653-295-4

A $(JL)^2$ S & $M^{\underline{a}}I$

Primera edición: septiembre de 1993

Presentación

Mis largos años de experiencia docente en la ETSEIB no sólo impartiendo clases de Álgebra Lineal a los estudiantes de primer curso, sino preparando las colecciones de ejercicios que los alumnos resuelven en sus clases de problemas, me han permitido reunir una colección de éstos, en los que el alumno encuentra especial dificultad. Después de resolverlos con todo detalle me ha surgido la idea de publicarlos para que puedan ser de utilidad, ya no sólo a los alumnos de la ETSEIB, sinó a alumnos de cualquier otra escuela politécnica e incluso a alumnos de facultades de ciencias.

Algunos de los enunciados de los problemas están inspirados en textos teóricos de Álgebra Lineal y el orden y reparto en capítulos ha sido, obviamente, fuente de inspiración el programa de la asignatura de Álgebra Lineal de la escuela donde ejerzo mi labor docente.

Primera edición: septiembre de 1993

ÍNDICE

Primera edición: septiembre de 1993

Capítulo 1 Polinomios y fracciones racionales

1. Hallar el máximo común divisor, por el algoritmo de Euclides, de los polinomios

$$P_1(x) = 2156x^5 + 1120x^4 - 433x^3 - 179x^2 + 32x + 4$$
$$P_2(x) = 1372x^5 + 784x^4 - 245x^3 - 131x^2 + 16x + 4$$

Solución:

Recordando el teorema de Euclides:

$$MCD(P_1(x), P_2(x)) = MCD(P_2(x), R(x))$$

Siendo $R(x)$ el resto de dividir $P_1(x)$ entre $P_2(x)$

Sabemos que

$$MCD(P_1(x), P_2(x)) = MCD(\lambda P_1(x), P_2(x)) \qquad \forall\lambda \text{ unidad en } \mathbf{R}[x]$$

y al ser $2156 = 4.7^2.11$ y $1372 = 4.7^3$, multiplicaremos $P_1(x)$ por 7 para evitar fracciones al hacer la división de $P_1(x)$ por $P_2(x)$;

$$7.P_1(x) = P_2(x).11 + (-784x^4 - 336x^3 + 188x^2 + 48x - 16)$$
$$R(x) = -784x^4 - 336x^3 + 188x^2 + 48x - 16$$

que simplificamos por -4 quedando

$$R(x) = 196x^4 + 84x^3 - 47x^2 - 12x + 4$$

$$P_2(x) = R(x) \cdot (7x + 1) + 0 \text{ luego } MCD(P_2(x), R(x)) = R(x)$$

por lo que:

$$MCD(P_1(x), P_2(x)) = R(x) = 196x^4 + 84x^3 - 47x^2 - 12x + 4$$

2. Hallar las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ sabiendo que una de ellas es triple.

Solución:

La descomposición en factores primos del polinomio será:

$$P(x) = (x - \alpha)^3 (x - \beta)$$

Si α es una raíz triple de $P(x)$, es raíz doble de $P'(x)$ y simple de $P"(x)$.

Por lo tanto el $MCD(P'(x), P"(x))$ contiene el factor $(x - \alpha)$. Basta pues hallar $MCD(P'(x), P"(x))$ y entre sus factores, por tanteo en $P(x)$, puede extraerse el valor de α .

Ahora bien, en este caso concreto, puesto que $P"(x)$ es de grado dos, resulta más sencillo hallar las raíces de $P"$ y de las dos ver cuál lo es también de $P(x)$

$$\begin{aligned} P'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \\ P"(x) &= 12x^2 - 6x - 6 \end{aligned}$$

$$\text{De } P"(x) = 0 \text{ tenemos } x = -\frac{1}{2},\ x = 1$$

$P(-\frac{1}{2}) \neq 0$, luego $-\frac{1}{2}$ no es raíz de $P(x)$, sin embargo $P(1) = 0$ luego $\alpha = 1$ es la raíz buscada.

Puesto que dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ con raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ contadas con su multiplicidad, es $a_{n-1} = -(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$, se tiene $\beta = -2$.

3. Probar que $P(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ es divisible por $(x-1)^3$. (Se supone $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ y $n \in \mathbf{N}$).

Solución:

Que $P(x)$ sea divisible por $(x - 1)^3$ equivale a que 1 es por lo menos raíz triple de $P(x)$, raíz doble por lo menos, de $P'(x)$ y raíz simple por lo menos, de $P"(x)$.

Veamos

$$\begin{aligned}
P(1) &= n-(n+2)+(n+2)-n = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz de } P(x)\\
P'(x) &= n(n+2)x^{n+1}-(n+2)(n+1)x^n+(n+2)\\
P'(1) &= n(n+2)-(n+2)(n+1)+(n+2) = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz de } P'(x)\\
P"(x) &= n(n+2)(n+1)x^n-(n+2)(n+1)nx^{n-1}\\
P"(1) &= n(n+2)(n+1)-(n+2)(n+1)n = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz de } P"(x)
\end{aligned}$$

por lo tanto $P(x)$ es divisible por $(x-1)^3$ como pretendíamos probar.

Observamos además que $P(x)$ no es divisible por $(x-1)^4$ pues

$$\begin{aligned}
P'''(x) &= n^2(n+2)(n+1)x^{n-1}-(n+2)(n+1)(n-1)nx^{n-2}\\
P'''(1) &= n^2(n+2)(n+1)-(n+2)(n+1)(n-1)n = n(n+1)(n+2) \neq 0.
\end{aligned}$$

4. Consideremos $P(x) = x^3-4x^2+5x-2$ a coeficientes reales.

a) Determinar $P'(x)$ (polinomio derivado de $P(x)$) y dar su descomposición en factores primos.

b) Probar que una de las raíces de $P'(x)$ lo es también de $P(x)$ y deducir de esto la descomposición en factores primos de $P(x)$.

c) Calcular $MCD(P(x), P'(x))$ y determinar dos polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ tales que:

$$P_1(x)P(x)+P_2(x)P'(x) = MCD(P(x), P'(x)).$$

Solución:

a)

$$P'(x) = 3x^2-8x+5 = (x-1)(3x-5).$$

b) Las raíces de $P'(x)$ son 1 y $\frac{5}{3}$, ahora bien:

$$\begin{aligned}
&P(\frac{5}{3}) \neq 0 \text{ luego } \frac{5}{3} \text{ no es raíz de } P(x).\\
&P(1) = 0 \text{ luego } 1 \text{ es raíz doble de } P(x)\\
&P"(1) = -2 \text{ luego } 1 \text{ no es raíz triple de } P(x)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(x) = (x-1)^2(x-a) &= x^3-(2+a)x^2+(2a+1)x-a = \\ &= x^3-4x^2+5x-2 \end{aligned}$$

de donde $a = 2$.

c) de

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x-2) \\ P'(x) &= (x-1)(3x-5) \end{aligned}\right\}$$

se deduce que: $MCD(P(x), P'(x)) = (x-1)$.

Por el algoritmo de división $(P(x) = P'(x)Q(x) + R(x))$ tenemos:

$$9P(x) = P'(x)(3x-4) + (-2x+2) = P'(x)(3x-4) - 2(x-1).$$

Despejando $(x-1)$

$$\begin{aligned} 9P(x) - P'(x)(3x-4) &= -2(x-1) \\ \frac{-9}{2}P(x) - \frac{1}{2}(3x-4)P'(x) &= (x-1) \end{aligned}$$

Luego

$$P_1(x) = \frac{-9}{2}, \quad P_2(x) = \frac{-1}{2}(3x-4).$$

5. Los restos de dividir un polinomio $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ por $x-1$, $x-2$ y $x-3$ son respectivamente $3, 7, 13$

Determinar el resto de dividir $P(x)$ por el producto

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

Solución:

Por el algoritmo de división sabemos

$$\begin{aligned} &P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \quad \text{con} \quad grado\, R(x) < grado\, D(x) \\ &P(x) = (x-1)Q_1(x) + R_1(x) = (x-1)Q_1(x) + 3 \\ &P(x) = (x-2)Q_2(x) + R_2(x) = (x-2)Q_2(x) + 7 \\ &P(x) = (x-3)Q_3(x) + R_3(x) = (x-3)Q_3(x) + 13 \\ &P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q + R(x) \quad \text{con} \quad R(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Sabemos que el valor numérico de un polinomio $P(x)$ en u es el resto de dividir el polinomio por $x-u$; luego y para $i=1,2,3$

$$P(u)=(x-u)Q_i(u)+R_i(u)=(u-1)(u-2)(u-3)Q(u)+R(u)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=R_1(1)=3=R(1)=a+b+c \\ P(2)=R_2(2)=7=R(2)=4a+2b+c \\ P(3)=R_3(3)=13=R(3)=9a+3b+c \end{array}\right\}$$

que, resolviendo el sistema nos queda:

$$a=b=c=1 \quad \text{y} \quad R(x)=x^2+x+1.$$

6. Encontrar un polinomio $P(x)\in\mathbf{R}[x]$ de grado cinco, tal que $P(x)+10$ sea divisible por $(x+2)^3$ y $P(x)-10$ sea divisible por $(x-2)^3$

Solución:

Puesto que $P(x)+10$ es divisible por $(x+2)^3$, tenemos que $P'(x)=(P(x)+10)'$ es divisible por $(x+2)^2$; y puesto que $P(x)-10$ es divisible por $(x-2)^3$, tenemos que $P'(x)=(P(x)-10)'$ es divisible por $(x-2)^2$; luego $P'(x)$ (polinomio de grado cuatro) será

$$P'(x)=k(x+2)^2(x-2)^2=k(x^4-8x^2+16) \quad \text{con} \quad k\in\mathbf{R}$$

de donde

$$P(x)=k(\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x+c), \text{ con } c\in\mathbf{R} \quad \text{e imponiendo que}$$

$$\left.\begin{array}{r} P(-2)=-10 \\ P(2)=10 \end{array}\right\}$$

Nota: Observamos que

$$\begin{array}{l} P(x)+10=(x+2)^3Q_1(x)\Longrightarrow P(x)=(x+2)^3Q_1(x)-10\Longrightarrow P(-2)=-10 \\ P(x)-10=(x-2)^3Q_2(x)\Longrightarrow P(x)=(x-2)^3Q_2(x)+10\Longrightarrow P(2)=10 \end{array}$$

resulta

$$\begin{aligned} -10 &= k(\frac{-32}{5}+\frac{64}{3}-32+c) \\ 10 &= k(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32+c) \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema tenemos

$$c=0,\ k=\frac{75}{128} \quad \text{y} \quad P(x)=\frac{15}{128}x^5-\frac{25}{16}x^3+\frac{75}{8}x$$

Otro método:

De:

$$\left.\begin{array}{lll} P(x)+10=(x+2)^3C_1(x) & \text{con} & grado\, C_1(x)=2 \\ P(x)-10=(x+2)^3C_2(x) & \text{con} & grado\, C_2(x)=2 \end{array}\right\}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} 20 &= (x+2)^3C_1(x)-(x-2)^3C_2(x) \\ 1 &= (x+2)^3(\frac{1}{20}C_1)+(x-2)^3(\frac{1}{20}C_2(x)) \end{aligned}$$

es decir, hemos de buscar $\frac{1}{20}C_1(x)$ y $\frac{1}{20}C_2(x)$ que son los polinomios de grado mínimo que hacen que se cumpla la *identidad de Bezout*, (observese que $(x+2)^3$ y $(x-2)^3$ son primos entre sí).

7. Descomponer en fracciones simples sobre $\mathbf{R}$, la fracción

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)}$$

Ídem sobre $\mathbf{C}$.

Solución:

Planteamos

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-3}+\frac{dx+e}{x^2+4}$$

(Observamos que x^2+4 es primo sobre $\mathbf{R}$). Operando en el segundo miembro, queda

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)} =$$
$$\frac{a(x-1)(x-3)(x^2+4)+b(x-3)(x^2+4)+c(x-1)^2(x^2+4)+(dx+e)(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)}$$

De la igualdad de estas dos fracciones se deduce la igualdad de los polinomios numeradores de las fracciones. De aquí se deduce por lo tanto un método de cálculo de los coeficientes desconocidos: identificar los coeficientes de igual grado de ambos polinomios, obteniendo así un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Otro método más sencillo para obtener los coeficientes es: si dos polinomios son iguales, sus funciones polinómicas asociadas son también iguales, por lo que, dando valores a x en ambos polinomios, los valores numéricos han de ser iguales. Así,

para $x=1$ es $-14+3-39=b(1-3)(1+4) \quad \Rightarrow \quad b=5$
para $x=3$ es $-14\cdot 32+9-39=c(3-1)^2(3^2+4) \;\Rightarrow\; c=-3$
para $x=0$ es $-39=12a-60-12-3e \;\Rightarrow\; 12a-3e=33$
para $x=-1$ es $-14-3-39=40a-100-60-16(-d+e) \;\Rightarrow\; 10a+4d-4e=26$
para $x=2$ es $-56+6-39=-8a-40-24-(2d+e) \;\Rightarrow\; 8a+2d+e=25$

Resolviendo las tres últimas ecuaciones resulta $a=3, \quad d=0, \quad e=1$, luego la descomposición es

$$\frac{3}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{-3}{x-3}+\frac{1}{x^2+4}$$

Pasemos ahora a efectuar la descomposición en $\mathbf{C}$.

x^2+4 ya no es primo en $\mathbf{C}$, $x^2+4=(x-2i)(x+2i)$, por lo que la descomposición será:

$$\frac{-14x^2+3x-39}{(x-1)^2(x-3)(x^2+4)} =$$
$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-3}+\frac{m}{x-2i}+\frac{n}{x+2i}$$

Comparando esta descomposición con la anterior, podemos asegurar que a, b, c serán los mismos obtenidos para el caso real, y $\dfrac{m}{x-2i}+\dfrac{n}{x+2i}=\dfrac{1}{x^2+4}$ por lo que $1=m(x+2i)+n(x-2i)$, que para $x=-2i$ se tiene $1=-4ni \;\rightarrow\; n=+\frac{1}{4}i$

para $x=2i$ se tiene $1=4mi \;\Rightarrow\; m=-\frac{1}{4}i$, y la descomposición es

$$\frac{3}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{-3}{x-3}+\frac{-\frac{1}{4}i}{x-2i}+\frac{\frac{1}{4}i}{x+2i}$$

8. Descomponer en fracciones simples sobre **C, R** y **Q** la fracción racional siguiente

$$\frac{t^6+t^4-t^2-1}{t^3(t^2-2t-1)}=Q(t).$$

Solución:

Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador, efectuamos la división y tenemos

$$Q(t)=t+2+\frac{6t^4+2t^3-t^2-1}{t^5-2t^4-t^3}$$

$t^5-2t^4-t^3$ tiene la misma descomposición en factores primos tanto sobre **R** como sobre **C**:

$$t^5-2t^4-t^3=t^3(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})$$

No así sobre **Q** que t^2-2t-1 es primo, por lo que la descomposición en fracciones simples de $Q(t)$ será la misma tanto sobre **R** como sobre **C** y distinta para **Q**.

Veamos para **R** y **C**:

$$Q(t)=t+2+\frac{A}{t^3}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t}+\frac{D}{t-1-\sqrt{2}}+\frac{E}{t-1+\sqrt{2}}$$

que operando obtenemos

$$\begin{aligned}Q(t)&=t+2+\frac{(A+Bt+Ct^2)(t^2-2t-1)+t^3(D(t-1+\sqrt{2})+E(t-1-\sqrt{2}))}{t^5-2t^4-t^3}\\&=t+2+\frac{P(t)}{t^5-2t^4-t^3}\end{aligned}$$

por lo que

$$6t^4+2t^3-t^2-1=(A+Bt+Ct^2)(t^2-2t-1)+t^3(D(t-1+\sqrt{2})+E(t-1-\sqrt{2}))=P(t)$$

y haciendo uso del hecho: si dos polinomios son iguales también lo son sus funciones polinómicas asociadas, tenemos

$$\begin{aligned}&(6t^4+2t3-t^2-1)(0)=-1=P(0)=-A\\&(6t^4+2t^3-t^2-1)'(0)=0=P'(0)=-B-2A\\&(6t^4+2t3-t^2-1)''(0)=-2-P''(0)=2(A-2B-C)\\&(6t^4+2t^3-t^2-1)'''(0)=12=\\&\qquad\qquad=P'''(0)=6(B-2C+(-1+\sqrt{2})D+(-1-\sqrt{2})E)\\&(6t^4+2t^3-t^2-1)''''(0)=144=P''''(0)=48C+48(D+E)\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$A = 1 \quad B = -2 \quad C = 6 \quad D = 4\sqrt{2} \quad E = -4\sqrt{2}$$

y la descomposición es

$$Q(t) = t + 2 + \frac{1}{t^3} + \frac{-2}{t^2} + \frac{6}{t} + \frac{4\sqrt{2}}{t - 1 - \sqrt{2}} + \frac{-4\sqrt{2}}{t - 1 + \sqrt{2}}$$

Pasemos a la descomposición de $Q(t)$ sobre $\mathbf{Q}$:

$$Q(t) = t + 2 + \frac{A}{t^3} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t} + \frac{M}{t^2 - 2t - 1}$$

haciendo $\dfrac{4\sqrt{2}}{t - 1 - \sqrt{2}} + \dfrac{-4\sqrt{2}}{t - 1 + \sqrt{2}} = \dfrac{16}{t^2 - 2t - 1} \in \mathbf{Q}(t)$

por lo que

$$Q(t) = t + 2 + \frac{1}{t^3} + \frac{-2}{t^2} + \frac{6}{t} + \frac{16}{t^2 - 2t - 1}$$

y puesto que la descomposición en fracciones simples es única, ésta será la descomposición sobre $\mathbf{Q}$.

9. Descomponer en fracciones simples sobre $\mathbf{C}$ la fracción racional siguiente

$$Q(x) = \frac{1}{(x-3)^9 (x-5)^9}$$

Solución:

La descomposición será

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{9} \frac{A_n}{(x-3)^n} + \sum_{n=1}^{9} \frac{B_n}{(x-5)^n}$$

donde A_n, B_n con $n = 1, \ldots, 9$ son números complejos a determinar.

Consideremos $F(x) = \dfrac{1}{(x-5)^9}$ función racional; desarrollamos $F(x)$ por la fórmula de Taylor en el punto $x = 3$, hasta el orden 8, obteniendo

$$F(x) = F(3) + \frac{F'(3)}{1!}(x-3) + \ldots + \frac{F^8(3)}{8!}(x-3)^8 + G(x)(x-3)^9$$

siendo $G(x)$ una función racional que está definida para $x = 3$; usando este desarrollo tenemos

$$\frac{1}{(x-3)^9(x-5)^9} = \frac{F(3)}{(x-3)^9} + \frac{F'(3)}{(x-3)^8} + \ldots + \frac{F^8(3)}{8!(x-3)} + G(x)$$

Por la unicidad de los coeficientes A_n y B_n tenemos

$$A_n = \frac{F^{9-n}(3)}{(9-n)!}$$

$$F^n(x) = (-9)(-9-1)...(-9-n+1)(x-5)^{-9-n} = (-1)^n\frac{(8+n)!}{8!}\frac{1}{(x-5)^{9+n}}$$

luego $F^n(3) = (-1)^n\dfrac{(8+n)!}{8!}\dfrac{1}{(-2)^{9+n}}$

y $A_n = (-1)^{9-n}\dfrac{(17-n)!}{8!(9-n)!}\dfrac{1}{(-2)^{18-n}}$

y por simetría tenemos, (observese que obtenemos B_n considerando $F_1(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ y repitiendo el proceso anterior).

$$B_n = (-1)^{9-n}\frac{(17-n)!}{8!(9-n)!}\frac{1}{2^{18-n}}$$

10. Sobre el cuerpo de los racionales, descomponer en fracciones simples la fracción racional siguiente

$$Q(x) = \frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x^3+2)}$$

Solución:

Observamos que x^3+2 no tiene raíces en $\mathbf{Q}$, luego

$$\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x^3+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx^2+Cx+D}{(x^3+2)}$$

Operando

$$\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x^3+2)} = \frac{A(x^3+2)+(Bx^2+Cx+D)(x+1)}{(x+1)(x^3+2)}$$

Igualando numeradores tenemos

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ B+C&=2\\ C+D&=0\\ 2A+D&=2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A&=4\\ B&=-4\\ C&=6\\ D&=-6\end{aligned}$$

luego la descomposición es

$$Q(x)=\frac{4}{(x+1)}+\frac{-4x^2+6x-6}{x^3+2}$$

11. Descomponer sobre $\mathbf{R}$ la fracción:

$$Q(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)^n}$$

Solución:

Haciendo $x^2+1=y$ tenemos $x^2=y-1$, luego

$$\begin{aligned}\frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n} &= \frac{(y-1)^n}{y^n} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}(-1)^i y^{n-i}}{y^n} = \\ &= 1-\frac{\binom{n}{1}}{y}+\frac{\binom{n}{2}}{y^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\binom{n}{1}}{y} = \\ &= 1-\frac{\binom{n}{1}}{x^2+1}+\frac{\binom{n}{2}}{(x^2+1)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{(x^2+1)^n}\end{aligned}$$

Capítulo 2 Espacios vectoriales

1. Sea $\mathbf{R}_0$ el grupo multiplicativo de los números reales estrictamente positivos. Probar que $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial con las operaciones siguientes:

$$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} (x,y,z) * (x_1,y_1,z_1) &= (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1) \\ \lambda \circ (x,y,z) &= (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda) \end{aligned}$$

En caso de ser dimensión finita determinar una base

Solución:

Es fácil probar que con la operación $*$ el conjunto $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ es un grupo abeliano:

Asociatividad

$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned} &(x,y,z) * ((x_1,y_1,z_1) * (x_2,y_2,z_2)) = (x,y,z) * (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2) = \\ &= (x \cdot (x_1 \cdot x_2), y * y_1 \cdot y_2), z \cdot z_1 \cdot z_2)) = ((x \cdot x_1) \cdot x_2, (y \cdot y_1) \cdot y_2, (z \cdot z_1) \cdot z_2) = \\ &= (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1) * (x_2,y_2,z_2) = ((x,y,z) * (x_1,y_1,z_1)) * (x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

(Esta propiedad nos permite escribir $(x,y,z) * (x_1,y_1,z_1) * (x_2,y_2,z_2)$)

Conmutatividad

$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned} (x,y,z) * (x_1,y_1,z_1) = (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1) = (x_1 \cdot x, y_1 \cdot y, z_1 \cdot z) = \\ = (x_1,y_1,z_1) * (x,y,z) \end{aligned}$$

Elemento neutro

$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$(1,1,1) * (x,y,z) = (1 \cdot x, 1 \cdot y, 1 \cdot z) = (x,y,z)$$

Elemento simétrico

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \ \exists (1/x, 1/y, 1/z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \quad \text{tal que}$$
$$(x,y,z) * (1/x, 1/y, 1/z) = (x \cdot 1/x, y \cdot 1/y . z \cdot 1/z) = (1,1,1)$$

Veamos ahora que la operación externa verifica las cuatro propiedades necesarias para que el conjunto sea un espacio vectorial:

Primera ley distributiva

$\forall \lambda \in \mathbf{R} \ \forall (x,y,z), (x_1,y_1,z_1) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned}
&\lambda \circ ((x,y,z) * (x_1,y_1,z_1)) = \lambda \circ (x \cdot x_1, y \cdot y_1, z \cdot z_1) = \\
&= ((x \cdot x_1)^\lambda, (y \cdot y_1)^\lambda, (z \cdot z_1)^\lambda) = (x^\lambda \cdot x_1^\lambda, y^\lambda \cdot y_1^\lambda, z^\lambda \cdot z_1^\lambda) = \\
&= (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda) * (x_1^\lambda, y_1^\lambda, z_1^\lambda) = (\lambda \circ (x,y,z)) * (\lambda \circ (x_1,y_1,z_1))
\end{aligned}$$

Segunda ley distributiva

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} \ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu) \circ (x,y,z) = (x^{\lambda+\mu}, y^{\lambda+\mu}, z^{\lambda+\mu}) = (x^\lambda \cdot x^\mu, y^\lambda \cdot y^\mu, z^\lambda \cdot z^\mu) = \\
&= (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda) * (x^\mu, y^\mu, z^\mu) = (\lambda \circ (x,y,z)) * (\mu \circ (x,y,z))
\end{aligned}$$

Asociatividad de los escalares

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} \ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$\begin{aligned}
&(\lambda \cdot \mu) \circ (x,y,z) = (x^{\lambda \cdot \mu}, y^{\lambda \cdot \mu}, z^{\lambda \cdot \mu}) = \\
&= ((x^\mu)^\lambda, (y^\mu)^\lambda, (z^\mu)^\lambda) = \lambda \circ (x^\mu, y^\mu, z^\mu) = \\
&= \lambda \circ (\mu \circ (x,y,z))
\end{aligned}$$

Propiedad del elemento unidad del cuerpo

$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$

$$1 \circ (x,y,z) = (x^1, y^1, z^1) = (x,y,z)$$

luego, en efecto $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial.

Veamos cuál es su dimensión y si es posible, determinemos una base.

Sabemos que $\forall x \in \mathbf{R}_0 \ x = e^{\log x}$, luego $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$, se tiene

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (e^{\log x}, e^{\log y}, e^{\log z}) = (e^{\log x},1,1) * (1,e^{\log y},1) * (1,1,e^{\log z}) = \\ &= (\log x \circ (e,1,1)) * (\log y \circ (1,e,1)) * (\log z \circ (1,1,e))\end{aligned}$$

luego los vectores $(e,1,1),(1,e,1),(1,1,e) \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ forman un sistema de generadores.

Claramente son independientes, veamos:

de $$(\lambda_1 \circ (e,1,1)) * (\lambda_2 \circ (1,e,1)) * (\lambda_3 \circ (1,1,e)) = (1,1,1)$$

tenemos

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}) = (1,1,1) \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda_i} = 1 \ \forall i = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \ \forall i = 1,2,3$$

por lo que forman una base de dicho espacio vectorial.

2. Demostrar que el conjunto E de las sucesiones numéricas

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots) = (u_n) \qquad n \in \mathbf{N}$$

de números reales provista de dos leyes de composición, una interna $+$ y una externa $\cdot$, definidas mediante:

$$\forall u,v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} u+v = (u_n + v_n) & \forall n \in \mathbf{N} \\ \lambda \cdot u = (\lambda \cdot u_n) & \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

es un espacio vectorial.

Solución:

Primero, probaremos que la operación (interna) $+$ dota a E de estructura de grupo abeliano

Asociatividad

$$\begin{aligned} u+(v+w) &= (u_n+(v+w)_n) = (u_n+(v_n+w_n)) \underset{(1)}{=} \\ &= ((u_n+v_n)+w_n) = ((u+v)_n+w_n) = (u+v)+w \end{aligned}$$

(1) $\mathbf{R}$ tiene estructura de grupo, con la operación $+$

Conmutatividad

$$(u+v) = (u_n+v_n) = (v_n+v_n) = (v+u)$$

Existencia de elemento neutro

veamos que existe $e \in E$ tal que $u+e=u, \forall u \in E$

si $u+e=(u_n+e_n)=u, \ \forall u \in E$, entonces $u_n+e_n=u_n, \forall n \in \mathbf{N}$, de donde $e_n=0, \forall n \in \mathbf{N}$ y $e=(0,0,\dots,0,\dots)$, luego e existe y es único.

Existencia de elemento simétrico

hemos de ver que $\forall u \in E$ existe u^{-1} tal que $u+u^{-1}=e$

si $u+u^{-1}=(u_n+u_n^{-1})=e$, entonces $u_n+u_n^{-1}=0, \forall n \in \mathbf{N}$, de donde $u_n^{-1}=-u_n, \forall n \in \mathbf{N}$ y $u^{-1}=(-u_n)$; luego u^{-1} existe y es único.

Veamos ahora que la operación (externa) $\cdot$ verifica las cuatro propiedades, necesarias para que el grupo abeliano E sea un $\mathbf{R}$-espacio vectorial

Primera ley distributiva

$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(u+v) &= (\lambda(u+v)_n) = (\lambda(u_n+v_n)) = (\lambda u_n + \lambda v_n) = \\ &= (\lambda u_n) + (\lambda v_n) = \lambda(u_n) + \lambda(v_n) = \lambda u + \lambda v \end{aligned}$$

Segunda ley distributiva

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \forall u \in E$

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)u &= ((\lambda+\mu)u_n) = (\lambda u_n + \mu u_n) = (\lambda u_n) + (\mu u_n) = \\ &= \lambda(u_n) + \mu(u_n) = \lambda u + \mu u \end{aligned}$$

Asociatividad de los escalares

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \forall u \in E$

$$(\lambda\mu)u = ((\lambda\mu)u_n) = (\lambda(\mu u_n)) = \lambda(\mu u_n) = \lambda(\mu(u_n)) = \\ = \lambda(\mu u)$$

Propiedad del elemento unidad del cuerpo

Sea $1 \in \mathbf{R}$ y $\forall u \in E$

$$1 \cdot u = (1 \cdot u_n) = (u_n) = u$$

luego E es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial.

3. Sea $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Estudiar, para qué valores de $k \in \mathbf{R}$;

$$W = \{f \in F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) / f(1) = k\}$$

es un subespacio vectorial de F.

Solución:

Recordemos que F es un subespacio vectorial del K-espacio vectorial E si y solamente si:

$$\forall \lambda,\, \mu \in K \ \forall u,\, v \in F \quad \text{entonces} \quad \lambda u + \mu v \in F$$

Sean pues $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ y $f, g \in F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$;

$$(\lambda f + \mu g) \in F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad (\lambda f + \mu g)(1) = k$$

comprobemos si esto es así

$$(\lambda f + \mu g)(1) = (\lambda f)(1) + (\mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda k + \mu k = (\lambda + \mu)k$$

luego $(\lambda + \mu)k = k \ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ si y sólo si $k = 0$, por lo tanto W es subespacio vectorial si y sólo si $k = 0$.

4. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\mathbf{R}$-espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

¿Determinan los vectores ae_1+be_2, ce_2+de_3, ee_3+fe_1, con a,b,c,d,e,f escalares no nulos, una base de E?

Aplicar el resultado a las familias de vectores

a) $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,-1)$

b) $(3,1,0)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$

referidos a la base natural de $\mathbf{R}^3$.

Solución:

Puesto que el número de vectores dado coincide con la dimensión del espacio, estos vectores forman base si y sólo si son independientes. Recordemos que una colección de vectores $\{e_1,\dots,e_n\}$ de un K-espacio vectorial son independientes si y sólo si:

$$\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n=0 \Leftrightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0$$

Veamos pues,

$$\begin{aligned}\lambda_1(ae_1+be_2)+\lambda_2(ce_2+de_3)+\lambda_3(ee_3+fe_1) &= 0\\(\lambda_1 a+\lambda_3 f)e_1+(\lambda_1 b+\lambda_2 c)e_2+(\lambda_2 d+\lambda_3 e)e_3 &= 0\end{aligned}$$

Y puesto que $\{e_1,e_2,e_3\}$ es base, tenemos

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 a+\lambda_3 f &= 0\\ \lambda_1 b+\lambda_2 c &= 0\\ \lambda_2 d+\lambda_3 e &= 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\lambda_1 ab+\lambda_3 fb &= 0\\ \lambda_1 ab+\lambda_2 ac &= 0\\ \lambda_2 d+\lambda_3 e &= 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\lambda_3 fb-\lambda_2 ac &= 0\\ \lambda_2 d+\lambda_3 e &= 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_3 fbd-\lambda_2 acd &= 0\\ \lambda_2 acd+\lambda_3 ace &= 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lambda_3(fbd+ace) = 0$$

Luego, si $fbd+ace\neq 0\Rightarrow\lambda_3=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_1=0$ y los vectores serán independientes y formarán base (si $fbd+ace=0$; cualquier $\lambda_3\in\mathbf{R}$ es solución del sistema y por lo tanto, los vectores dados, no pueden formar base.).

Aplicando el resultado a las familias dadas, tenemos

$$\text{a)}\quad\left.\begin{aligned}(1,1,0)=(1,0,0)+(0,1,0)&\Rightarrow a=b=1\\(0,1,1)=(0,1,0)+(0,0,1)&\Rightarrow c=d=1\\(1,0,-1)=(1,0,0)-(0,0,1)&\Rightarrow e=1, f=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow fbd=-ace$$

luego, son dependientes (la relación de dependencia es $(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,1)$.

b) $$\left.\begin{array}{l}(3,1,0)=3(1,0,0)+(0,1,0)\Rightarrow a=3, b=1\\(0,2,1)=2(0,1,0)+(0,0,1)\Rightarrow c=2, d=1\\(1,0,2)=(1,0,0)+2(0,0,1)\Rightarrow e=1, f=2\end{array}\right\}\Rightarrow fbd\neq -ace$$

luego, son independientes, y por lo tanto forman base.

5. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$ de dimensión n y sea $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ una base. Por restricción del cuerpo de escalares, E puede considerarse como un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

Demostrar que los $2n$ vectores $\{u_1,\dots,u_n,iu_1,\dots,iu_n\}$ forman una base de E sobre $\mathbf{R}$. Deducir de aquí que $dim\ E_{\mathbf{R}}=2\cdot dim\ E_{\mathbf{C}}$

Nota: hemos llamado $E_{\mathbf{C}}$, $E_{\mathbf{R}}$ a E como $\mathbf{C}$ espacio vectorial y como $\mathbf{R}$ espacio vectorial respectivamente.

Solución:

Ante todo, notamos que los vectores de $E_{\mathbf{C}}$ y $E_{\mathbf{R}}$ son los mismos. Veamos primero que los vectores dados son independientes en $E_{\mathbf{R}}$; consideremos una combinación lineal igualada a cero:

$$\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_nu_n+\lambda_{n+1}iu_1+\ldots+\lambda_{2n}iu_n=0, \quad \text{con} \quad \lambda_j\in\mathbf{R}\ j=1,\ldots,2n$$

sumergiendo $E_{\mathbf{R}}$ en $E_{\mathbf{C}}$ esta igualdad puede escribirse

$$(\lambda_1+\lambda_{n+1}i)u_1+\ldots+(\lambda_n+\lambda_{2n}i)u_n=0 \quad \text{con } \lambda_j+\lambda_{n+j}i\in\mathbf{C}$$

y puesto que $\{u_i\}$ son base de $E_{\mathbf{C}}$, tenemos

$$\lambda_j+\lambda_{n+j}i\ =\ 0 \quad \forall j=1,\ldots,n$$

por lo que:

$$\lambda_j=\lambda_{n+j}=0 \quad \forall j=1,\ldots,n$$

y por lo tanto, los vectores $\{u_1,\dots,u_n,iu_1,\dots,iu_n\}$ son independientes. Veamos ahora que generan $E_{\mathbf{R}}$. Si $u\in E_{\mathbf{R}}$, entonces $u\in E_{\mathbf{C}}$ y por lo tanto

$$u=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_nu_n \quad \text{con} \quad \lambda j\in\mathbf{C}\ j=1,\ldots,n,$$

es decir,

$$\lambda_j = a_j + b_j i \; j = 1, \ldots, n \text{ con } \quad a_j, b_j \in \mathbf{R},$$

luego

$$\begin{aligned} u &= (a_1 + b_1 i)u_1 + \ldots + (a_n + b_n i)u_n = \\ &= a_1 u_1 + b_1 i)u_1 + \ldots + a_n u_n + b_n i u_n = \\ &= a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + b_1 i u_1 + \ldots + b_n i u_n \end{aligned}$$

luego, son también generadores. Por ser un sistema de generadores independientes son base, y por lo tanto

$$dim\ E_{\mathbf{R}} = 2.dim\ E_{\mathbf{C}}$$

6. Sea $E = \mathbf{R}^3$. Decir si los vectores $\{(1,2,3), (2,5,8), (1,3,7)\}$ son dependientes o independientes.

Solución:

El método que vamos a usar aquí para la discusión de la dependencia o independencia se apoya en las proposiciones siguientes.

a) Dados p vectores, $p \leq n$, de un espacio vectorial de dimensión n, $x_i = (a_i^1, ..., a_i^n)$, $1 \leq i \leq p$, si los coeficientes a_i^j son nulos para $i > j$ con $a_i^i \neq 0$ (es decir, si colocamos los vectores en columna, la matriz obtenida es tal que por encima de la diagonal principal, los elementos son todos nulos), entonces los vectores son independientes (es una condición suficiente, pero no necesaria); . Análogamente, si los coeficientes a_i^j son nulos para $i < j$ con $a_i^i \neq 0$ (es decir, si colocamos los vectores en columna, la matriz obtenida es tal que por debajo de la diagonal principal, los elementos son todos nulos), también son independientes.

b) El rango de un sistema de vectores no varía si a uno de ellos le sumamos una combinación lineal de los demás, por lo tanto para investigar las dependencia o no de los vectores dados los colocaremos en columna yuxtaponiéndolos y haremos operaciones elementales de fila o columna para conseguir los ceros necesarios para conocer el rango de la matriz, es decir la dimensión del subespacio que engendran

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1' & x_2' & x_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\,; & x_2' &= -2x_1 + x_2\,; & x_3' &= -x_1 + x_3; \\ x_1'' &= x_1'\,; & x_2'' &= x_2'\,; & x_3'' &= -x_2' + x_3'; \end{aligned}$$

Los tres vectores cumplen la condición establecida en a), luego son independientes.

7. Hallar $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ para que $(\lambda, \mu, -37, -6) \in \mathbf{R}^4$ pertenezca al subespacio $F \subset \mathbf{R}$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$.

Solución:

Para que el vector $(\lambda, \mu, -37, -6)$ pertenezca a F es condición necesaria y suficiente que pueda ponerse en combinación lineal de los generadores de F :

$$(\lambda, \mu, -37, -6) = a(1, 2, -5, 3) + b(2, -1, 4, 7)$$

obligando pues a la compatibilidad del sistema resultante

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= a + 2b \\ \mu &= 2a - b \\ -37 &= -5a + 4b \\ -6 &= 3a + 7b \end{aligned}\right\} \qquad a = 5, \quad b = -3, \quad \lambda = -1, \quad \mu = 13$$

luego el vector $(\lambda, \mu, -37, -6) \in F$ si y sólo si $\lambda = -1$ y $\mu = 13$.

8. Sea $E = \mathbf{R}^2$ y W el subespacio engendrado por el vector $(1, 1)$. Si U es el subespacio engendrado por el vector $(0, 1)$. Probar que E es suma directa de W y U . Sea ahora U' el subespacio engendrado por el vector $(3, 1)$. Probar que también se verifica $E = W \oplus U'$ (no unicidad del complementario).

Solución:

Recordemos que si F, G son subespacios de E ; estos forman suma directa si y sólo si

$$F \cap G = \{0\}$$

Si F y G forman suma directa y además se verifica que

$$F + G = E$$

diremos que E es *suma directa* de estos dos subespacios y lo notaremos por $F \oplus G$. Si E es de dimensión finita y F y G forman suma directa, para que $F + G = E$ basta comprobar que

$$dim\ F + dim\ G = dim\ E$$

Tomemos pues $x \in W \cap U$, es $x = \lambda(1,1)$ por ser de W, y $x = \mu(0,1)$ por ser de U.

Identificando $\lambda(1,1) = \mu(0,1)$ es

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0,$$

luego $x = 0$ y por tanto la suma es directa. Puesto que $dim\ E = 2$ y $dim\ W = dim\ U = 1$ se tiene

$$dim\ W + dim\ U = dim E$$

luego, en efecto, $E = W \oplus U$.

Sea ahora $y \in W \cap U'$ como antes: $y = \lambda(1,1) = \mu(3,1)$, de donde

$$\lambda = 3\mu \qquad \lambda = \mu$$

y de aquí se deduce $\lambda = \mu = 0$, es decir, $y = 0$; luego W y U' forman también suma directa y $dim\ W + dim\ U' = 2 = dim\ E$, por tanto es también $E = W \oplus U'$

9. Sea P_3 el espacio vectorial de polinomios de una variable de grado inferior o igual a 3 a coeficientes en $\mathbf{R}$.

a) Probar que los polinomios $p \in P_3$ que verifican $p(1) = p'(1) = 0$ (siendo p' el polinomio derivado de p) forman un subespacio vectorial F de P_3. Dar su dimensión.

b) Los polinomios $(x-1)^2$ y $x(x-1)^2$, ¿son linealmente independientes? Dar una base de F.

c) Encontrar dos polinomios para completar la base de F y formar una base de P_3. Determinar un subespacio vectorial complementario E de F en P_3.

Solución:

a) Sean $p, q \in F$; veamos si $\lambda p - \mu q \in F \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$(\lambda p - \mu q)(1) = \lambda p(1) - \mu q(1) = \lambda \cdot 0 - \mu \cdot 0 = 0$$
$$(\lambda p - \mu q)'(1) = (\lambda p' - \mu q')(1) = \lambda p'(1) - \mu q'(1) = \lambda \cdot 0 - \mu \cdot 0 = 0$$

Luego, en efecto, $\lambda p - \mu q \in F$, y F es pues un subespacio vectorial.

Sea $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in F$, luego

$$\left.\begin{array}{r} p(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \;=\; 0 \\ p'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 \;=\; 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 \;=\; -3a_3 - 2a_2 \\ a_0 \;=\; 2a_3 + a_2 \end{array}$$

y por tanto,

$$\begin{array}{rl} p(x) \;=\; a_3x^3 + a_2x^2 + (-3a_3 - 2a_2)x + (2a_3 + a_2) \;= \\ = \; a_3(x^3 - 3x + 2) + a_2(x^2 - 2x + 1) = a_3p_1(x) + a_2p_2(x) \end{array}$$

y $p_1(x), p_2(x) \in F$ ($p_1(1) = p_1'(1) = 0$ y $p_2(1) = p_2'(1) = 0$) por lo que son generadores.

Y son independientes, pues de

$$a_3p_1(x) + a_2p_2(x) \;=\; 0\,; \quad \text{se tiene} \quad a_3 \;=\; a_2 \;=\; 0$$

luego son base, y $dim\, F \;=\; 2$.

Otra forma:

De hecho, basta observar que si $p(x) \in F$ entonces $p(x) = (x-1)^2(ax+b) = ax(x-1)^2 + b(x-1)^2 = ap_1(x) + bp_2(x)$ luego F es el conjunto de polinomios generado por $p_1(x), p_2(x)$ con $p_1(x)$ y $p_2(x)$ independientes, por lo que F es un subespacio vectorial de dimensión 2 y estos dos polinomios determinan una base

b) Sea $\lambda(x-1)^2 + \mu x(x-1)^2 \;=\; 0$, reordenando términos tenemos

$$\mu x^3 + (\lambda - 2\mu)x^2 + (\mu - 2\lambda)x + \lambda \;=\; 0$$

y por tanto, $\lambda \;=\; \mu \;=\; 0$, es decir, son independientes. En a hemos observado, que $(x-1)^2$, $x(x-1)^2 \in F$ (pues F es el conjunto de polinomios de grado menor o igual que tres tales que tienen a 1 como raíz de multiplicidad por lo menos dos), luego, son base de F .

c) Los vectores $x^2 - 2x + 1$, $x^3 - 2x^2 + x$ son independientes ya que forman una base de F . 1, x son vectores independientes de $x^2 - 2x + 1$, $x^3 - 2x^2 + x$, ya que

$$\begin{array}{c} \lambda \cdot 1 + \mu \cdot x + \alpha(x^2 - 2x + 1) + \beta(x^3 - 2x^2 + x) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \\ \beta x^3 + (\alpha - 2\beta)x^2 + (\mu - 2\alpha + \beta)x + \alpha + \lambda \;=\; 0 \end{array}$$

de donde $\alpha \;=\; \beta \;=\; \lambda \;=\; \mu \;=\; 0$

luego $G = [1, x]$ es un subespacio complementario de F.

10. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ relacionadas mediante:

$$\begin{cases} a_1 = b_1 - 3b_2 + 4b_3 \\ a_2 = b_2 + b_3 \\ a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

a) Hallar la matriz que transforma las coordenadas de los vectores de la base B a la A.

b) Sea $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ una nueva base cuyas coordenadas respecto de B son:

$$\begin{cases} c_1 = b_1 - b_2 + b_3 \\ c_2 = -b_1 + b_2 \\ c_3 = b_2 - b_3 \end{cases}$$

Hallar la matriz de transformación de B a C y de A a C.

Solución:

a) Recordemos que la matriz S de paso de A a B es la matriz cuadrada cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de A expresados en la base B. Luego:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{matriz de paso de } A \text{ a } B$$

y esta matriz es tal que si componemos dicha matriz con un vector columna cuyos componentes son las coordenadas de un vector de $\mathbf{R}^3$ en la base A, el resultado es el mismo vector (vector columna) cuyos componentes son las coordenadas del vector, pero expresado en la base B.

Obviamente, la matriz de paso de B a A será

$$S^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -7 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que necesitamos la expresión de los vectores de la base B en función de la base A, por lo que tenemos que invertir el sistema dado).

b) Análogamente, la matriz de paso de C a B es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

luego, la matriz de paso de B a C es

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y si componemos las matrices S y T^{-1}

$$T^{-1} \circ S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nos proporciona, obviamente, la matriz de paso de A a C.

11. Estudiar si los vectores $w_1 = (0,1,-2,1)$, $w_2 = (1,1,2,-1)$, $w_3 = (1,0,0,1)$, $w_4 = (2,2,0,-1)$ forman o no, una base de $\mathbf{R}^4$

Solución:

Para que formen base es condición necesaria y suficiente que sean linealmente independientes, es decir,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

lo que equivale a decir, que el sistema

$$\left.\begin{aligned} 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 + 2 \cdot \lambda_4 &= 0 \\ 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + 2 \cdot \lambda_4 &= 0 \\ -2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + 0 \cdot \lambda_4 &= 0 \\ 1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 - 1 \cdot \lambda_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tenga solución única; lo que equivale a que

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$D = -8 \neq 0$, luego, en efecto, son base.

Observamos que, para ver si n vectores de un espacio vectorial de dimensión n , forman base basta calcular el determinante de la matriz, formada por los vectores columna que expresan los vectores dados respecto una base y ver si es o no distinto de cero.

12. En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios E_1 y E_2 generados por los vectores (1,1,1,1) y (1,-1,1,-1) para E_1 , y (1,2,0,1) , (1,2,1,2) y (3,1,3,1) para E_2 .

Hallar las dimensiones del subespacio intersección y del subespacio suma.

Solución:

Observamos que $dim\, E_1 = 2$ ya que (1,1,1,1) , (1,-1,1,-1) son independientes.

Veamos cuál es el subespacio $E_1 \cap E_2$: si $v \in E_1 \cap E_2$, entonces

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(1,-1,1,-1) = \\ &= \mu_1(1,2,0,1) + \mu_2(1,2,1,2) + \mu_3(3,1,3,1) \end{aligned}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mu_1 + \mu_2 + 3\mu_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \mu_2 + 3\mu_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ 2\lambda_1 &= 3\mu_2 + 4\mu_3 \\ 2\lambda_2 &= -\mu_2 + 2\mu_3 \end{aligned}\right\}$$

por lo que, dando valores cualesquiera a los escalares μ_2, μ_3 , obtendremos los vectores de $E_1 \cap E_2$, y puesto que hay dos parámetros libres $dim E_1 \cap E_2 = 2$

Por ejemplo, para $\mu_2 = -1,\ \mu_3 = 1$, se tiene

$$w_1 = (3,1,3,1) - (1,2,1,2) = (2,-1,2,-1) \in E_1 \cap E_2$$

para $\mu_2 = \mu_3 = 1$

$$w_2 = (1,2,1,2) + (3,1,3,1) = (4,3,4,3) \in E_1 \cap E_2$$

observamos que w_1 y w_2 son independientes por lo que $dim\, E_1 \cap E_2 \geq 2$ y puesto que

$$E_1 \cap E_2 \subset E_1 \quad \text{y} \quad dim\, E_1 = 2$$

se tiene que $E_1 \cap E_2 = E_1$ y $dim\, E_1 \cap E_2 = 2$.

Sabemos que $dim\,(E_1{+}E_2) = dim\, E_1{+}dim\, E_2{-}dim\,(E_1{\cap}E_2)$, luego $dim(E_1{+}E_2) = dim\, E_2$.

(Tenemos que $E_1 + E_2 = E_2$, pues $E_2 \subset E_1 + E_2$ y tienen la misma dimensión).

Capítulo 3 Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices

1. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 8 & -4 & -29 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

reducirla a una matriz diagonal mediante transformaciones elementales de filas y columnas.

Solución:

Tomamos la matriz B y restamos la primera fila a la segunda; y la primera al doble de la tercera, quedando

$$B \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = B_1$$

Tomamos ahora la matriz B_1 y restamos a la tercera fila el triple de la segunda, quedando

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = B_2$$

Sobre B_2, dividimos la tercera fila por 49

$$B_2 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_3$$

Sobre B_3, sumamos a la segunda fila dieciséis veces la tercera y a la primera trece veces la tercera

$$B_3 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_4$$

Sobre B_4, sumamos a la primera fila cinco veces la segunda y tenemos

$$B_4 \sim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_5$$

que es ya diagonal; podemos seguir reduciendo dividiendo la primera fila por 8, obteniendo

$$B_5 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

luego $\quad B \sim I$.

2. Determinar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad A \in M_3(\mathbf{R})$$

por el *método del pivote*.

Solución:

Yuxtaponemos la matriz A y la matriz identidad I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \overline{A}$$

y hacemos las transformaciones elementales de filas, necesarias para convertir A en I. Una vez terminado el proceso la matriz que aparece en el lugar que ocupaba I es la matriz A^{-1} inversa de A

$$\overline{A} \underset{(a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(b)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(c)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \underset{(d)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \vdots & 9 & -48 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(e)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

y por consiguiente

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -11 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) A la tercera fila de $\overline{A}$ le sumamos la primera, obteniendo $\overline{A_1}$

(b) A la tercera fila de $\overline{A_1}$ multiplicada por -1 le sumamos seis veces la segunda de $\overline{A_1}$ obteniendo $\overline{A_2}$

(c) A la segunda fila de $\overline{A_2}$ le restamos dos veces la tercera de $\overline{A_2}$, obteniendo $\overline{A_3}$

(d) A la primera fila de $\overline{A_3}$ le restamos ocho veces la tercera, obteniendo $\overline{A_4}$

(e) A la primera fila de $\overline{A_4}$ le restamos cuatro veces la segunda

3. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z&=7\\ 2x+y-2z&=-2\\ 3x-y+z&=6 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema se expresa en forma matricial por

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&-2\\3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\\6\end{pmatrix} \qquad AX=\begin{pmatrix}7\\-2\\6\end{pmatrix} \text{ con } X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Yuxtaponemos a la matriz A la matriz columna $\begin{pmatrix}7\\-2\\6\end{pmatrix}$, obteniendo la matriz B y hacemos transformaciones elementales a B para poder comparar los rangos de A y B

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&7\\2&1&-2&-2\\3&-1&1&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&7\\0&5&-8&-16\\0&5&-8&-15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&7\\0&5&-8&-16\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

luego $rango A=2$, $rango B=3$, y por tanto, el sistema es incompatible.

4. Discutir según los valores de a,b,c,d el sistema a coeficientes en K siguiente

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z+4t&=a\\ 2x+3y+4z+t&=b\\ 3x+4y+z+2t&=c\\ 4x+y+2z+3t&=d \end{aligned}\right\}$$

suponiendo: a) $K=\mathbf{Q}$ b) $K=\mathbf{Z}$

Solución:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\2&3&4&1&b\\3&4&1&2&c\\4&1&2&3&d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\0&-1&-2&-7&-2a+b\\0&-2&-8&-10&-3a+c\\0&-7&-10&-13&-4a+d\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\0&1&2&7&2a-b\\0&0&4&-4&a-2b+c\\0&0&4&36&10a-7b+d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&a\\0&1&2&7&2a-b\\0&0&4&-4&-a+2b-c\\0&0&0&40&11-9b+c+d\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}10&20&30&40&10a\\0&40&80&280&80a-40b\\0&0&40&0&a+11b-9c+d\\0&0&0&40&11a-9b+c+d\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}40&0&0&0&-9a+b+c+11d\\0&40&0&0&a+b+11c-9d\\0&0&40&0&a+11b-9c+d\\0&0&0&40&11a-9b+c+d\end{pmatrix}$$

a) para $K=\mathbf{Q}$ las transformaciones elementales realizadas son válidas; el sistema tiene solución única

$$x=\frac{-9a+b+c+11d}{40}\qquad y=\frac{a+b+11c-9d}{40}$$
$$z=\frac{a+11b-9c+d}{40}\qquad t=\frac{11a-9b+c+d}{40}$$

b) para $K=\mathbf{Z}$ las transformaciones elementales realizadas son válidas; para que haya solución los elementos $-9a+b+c+11d, a+b+11c-9d, a+11b-9c+d, 11a-9b+c+d$ han de ser múltiplos de 40.

5. Estudiar según los valores de a el sistema

$$\left.\begin{array}{r}ax+y+z=a\\x+ay+z=a\\x+y+az=a\end{array}\right\}$$

resolviéndolo en los casos en que ello sea posible.

Solución:

Hallemos el valor del determinante de la matriz asociada al sistema

$$detA = det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

Luego, si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible y determinado y por el método de Cramer tenemos que la solución es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{a+2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{a+2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a}{a+2};$$

Si $a = -2$, $rangoA = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, y $rango\overline{A} = 3$ siendo $\overline{A}$ la matriz obtenida de A yuxtaponiéndole la matriz columna $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$

$$rango\overline{A} = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$, $rangoA = rango\overline{A} = 1$, luego el sistema es compatible indeterminado y el conjunto de soluciones es:

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 1\}$$

6. Resolver en $M_2(\mathbf{R})$ el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=\begin{pmatrix} 5 & 5\\ -5 & 1\end{pmatrix}\\ x+2y-3z=\begin{pmatrix} -1 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\\ 3x+5y-z=\begin{pmatrix} 5 & 8\\ -8 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Solución:

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5\\ -5 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} -1 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} 5 & 8\\ -8 & -1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=B$$

Tomamos la matriz A del sistema ampliada con la matriz B y procedemos a efectuar las oportunas transformaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 5\\ -5 & 1\end{pmatrix}\\ 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\\ 3 & 5 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 8\\ -8 & -1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\\ 2 & 3 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 5\\ -5 & 1\end{pmatrix}\\ 3 & 5 & 1 & \begin{pmatrix} 5 & 8\\ -8 & -1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\\ 0 & -1 & 7 & \begin{pmatrix} 7 & -1\\ 1 & 7\end{pmatrix}\\ 0 & -1 & 8 & \begin{pmatrix} 8 & -1\\ 1 & 8\end{pmatrix}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\\ 0 & -1 & 7 & \begin{pmatrix} 7 & -1\\ 1 & 7\end{pmatrix}\\ 0 & 0 & 1 & \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \begin{pmatrix} -1 & 3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\\ 0 & -1 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ 0 & 0 & 1 & \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ 0 & -1 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ 0 & 0 & 1 & \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

y por lo tanto la solución del sistema es

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\quad Y=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\quad Z=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

7. Se dice que $A \in M_3(\mathbf{R})$ es mágica si al sumar los elementos de cada fila, de cada columna, de la diagonal principal, y de la diagonal secundaria, se obtiene siempre el mismo valor. Construir todas las matrices mágicas simétricas.

Solución:

Una matriz $A = (a_{ij})$ es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}$ luego las matrices mágicas simétricas serán de la forma

$$\begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}$$

con $x + a + b = s$, $a + y + c = s$, $b + c + z = s$, $x + y + z = s$, $2b + y = s$ que interpretándolo como un sistema de cinco ecuaciones con siete incógnitas

$$\left.\begin{aligned} x + y + z - s &= 0 \\ y + a + c - s &= 0 \\ x + a + b - s &= 0 \\ z + b + c - s &= 0 \\ y + 2b - s &= 0 \end{aligned}\right\}$$

resulta un sistema homogéneo, por tanto compatible, y que vamos a resolver por transformaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quedando el sistema de rango cinco:

$$\left.\begin{aligned} 3x-3c &= 0\\ 3y-s &= 0\\ 3z+3c-2s &= 0\\ 3a+3c-2s &= 0\\ -3b+s &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x &= 3c\\ 3y &= s\\ 3z &= -3c+2s\\ 3a &= -3c+2s\\ 3b &= s \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= c\\ y &= \frac{s}{3} = b\\ z &= \frac{2s-3c}{3} = a \end{aligned}$$

por lo tanto la matriz mágica simétrica buscada es

$$\begin{pmatrix} c & \frac{2s-3c}{3} & \frac{s}{3}\\ \frac{2s-3c}{3} & \frac{s}{3} & c\\ \frac{s}{3} & c & \frac{2s-3c}{3} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{s}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para todo $c, s \in \mathbf{R}$.

8. Discutir y resolver en **R** el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y+5z &= 1\\ 4x+3y+6z &= 2\\ 5x+4y+7z &= 3\\ 6x+5y+8z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Escrito matricialmente, el sistema es

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 6\\ 5 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{pmatrix} = B$$

Tomamos la matriz $\overline{A}$ obtenida de A yuxtaponiéndole la matriz columna B y procedemos a efectuar transformaciones elementales de fila

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 6 & 2\\ 5 & 4 & 7 & 3\\ 6 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 4 & -4\\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 12\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos $rango\, A = rango\, \overline{A} = 2 < 3$, luego el sistema es compatible indeterminado y el conjunto de soluciones es

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / 2x+3y=4,\ -y+2z=-2\} = \{(2-\frac{3}{2}\lambda, \lambda, -1+\frac{1}{2}\lambda), \forall \lambda \in \mathbf{R}\}$$

9. Determinar X tal que $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Tomemos la matriz A_0 obtenida de A yuxtaponiéndole la matriz B y procedamos a efectuar transformaciones elementales de fila

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 & 1 \\ 1 & 0 & | & 0 & 2 \\ 1 & 1 & | & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{(a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 2 \\ 1 & 1 & | & 2 & 1 \\ 1 & 1 & | & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{(b)}{\sim}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 2 \\ 1 & 1 & | & 2 & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(c)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y tenemos que $rang\, A = 2$ y $rang\, A_0 = 2$ por lo tanto el sistema es compatible y determinado y la única solución es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Permutamos la primera con la segunda fila

(b) A la tercera fila le restamos la segunda

(c) A la segunda fila le restamos la primera.

10. Sean a, b, c, d, cuatro números reales estrictamente positivos. Demostrar que el sistema siguiente no posee ninguna solución en $\mathbf{R}$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+t &= a \\ x-y-z+t &= b \\ -x-y+z+t &= c \\ -3x+y-3z-7t &= d \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

luego el sistema no es de rango máximo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

luego el sistema es de rango tres y las tres primeras ecuaciones son independientes. Consideramos pues el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= a-t \\ x-y-z &= b-t \\ -x-y+z &= c-t \end{aligned}\right\}$$

que es compatible y determinado por ser de rango máximo; y resolviendo por Cramer, tenemos

$$x = \frac{a+b}{2} - t; \quad y = t - \frac{b+c}{2}; \quad z = \frac{a+c}{2} - t$$

Para que el sistema inicial sea compatible estos valores de x, y, z hallados, han de satisfacer la cuarta ecuación; substituyendo pues, tenemos

$$-3(\frac{a+b}{2} - t) + (t - \frac{b+c}{2}) - 3(\frac{a+c}{2} - t) - 7t = d$$

luego la compatibilidad implica

$$-(3a + 2b + 2c) = d$$

y puesto que a, b, c, d son estrictamente positivos, esta igualdad es imposible y el sistema es incompatible.

11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en **C**

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x+wy+w^2z &= b \\ x+w^2y+wz &= b \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que w es una raíz cúbica de la unidad.

Solución:

El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix} = (w-1)^2 - (w^2-1)^2 = 3w(w-1)$$

(Nota: puesto que $w^3 = 1$, se tiene $w^4 = w, \dots,$ y $w^3 - 1 = (w-1)(w^2+w+1)$).

Si $w(w-1) \neq 0$, el sistema es compatible y determinado para todo $a, b, \in \mathbf{C}$ y resolviendo el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & w & w^2 \\ b & w^2 & w \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a+2b}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & w^2 \\ 1 & b & w \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a-b}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & w & b \\ 1 & w^2 & b \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a-b}{3}$$

si $w(w-1) = 0$, se tiene que $w = 0$ o $w - 1 = 0$, pero si $w^3 = 1$, es $w \neq 0$, luego ha de ser $w - 1 = 0$, es decir $w = 1$, en cuyo caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

y para que el sistema sea compatible, $b - a = 0$, y el conjunto de soluciones es

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 / x + y + z = a\}$$

si $a \neq b$, el sistema es incompatible.

Capítulo 4 Aplicaciones lineales

1. Consideremos las aplicaciones entre **R**-espacios vectoriales siguientes:

a) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x+y, x-y, z-1)$

b) $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ tal que $g(x,y,z) = (x+z, y-z)$

c) $h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $h(x,y) = (x+k, y+k, x+y)$ con $k \in \mathbf{R}$

Determinar si son o no lineales.

Solución:

Recordemos que una aplicación $f : E \longrightarrow F$ con E, F, **K**-espacios vectoriales es lineal, si y sólo si

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall v, w \in E, \quad f(v+w) = f(v) + f(w) \\ 2) & \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{array}$$

comprobemos si, para cada caso, se verifican los axiomas:

a) 1) sean $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$f(v+w) = ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2), (z_1+z_2)-1$$

$$\begin{aligned} f(v)+f(w) &= (x_1+y_1, x_1-y_1, z_1-1)+(x_2+y_2, x_2-y_2, z_2-1) = \\ &= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), (x_1-y_1)+(x_2-y_2), (z_1-1)+(z_2-1)) = \\ &= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2), (z_1+z_2)-2)) \neq \\ &\neq f(v+w); \end{aligned}$$

luego, no puede ser lineal, (y no hace falta probar 2)

b) 1) sean $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\begin{aligned}
g(v + w) = ((x_1 + x_2) + (z_1 + z_2), (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2))\\
g(v) + g(w) &= (x_1 + z_1, y_1 - z_1) + (x_2 + z_2, y_2 - z_2) =\\
&= ((x_1 + z_1) + (x_2 + z_2), (y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)) =\\
&= ((x_1 + x_2) + (z_1 + z_2), (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)) = g(v + w)
\end{aligned}$$

2) Sea $v = (x_1, y_1, z_1)$, entonces $\forall\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda v = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

$$\begin{aligned}
g(\lambda v) &= g(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = (\lambda x_1 + \lambda z_1, \lambda y_1 - \lambda z_1)\\
\lambda g(v) &= \lambda(x_1 + z_1, y_1 - z_1) = (\lambda(x_1 + z_1), \lambda(y_1 - z_1)) =\\
&= (\lambda x_1 + \lambda z_1, \lambda y_1 - \lambda z_1) = g(\lambda v)
\end{aligned}$$

luego, g es lineal.

c) 1) Sean $v = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$, entonces $v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\begin{aligned}
h(v + w) = ((x_1 + x_2) + k, (y_1 + y_2) + k, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))\\
h(v) + h(w) &= (x_1 + k, y_1 + k, x_1 + y_1) + (x_2 + k, y_2 + k, x_2 + y_2) =\\
&= ((x_1 + k) + (x_2 + k), (y_1 + k) + (y_2 + k), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) =\\
&= ((x_1 + x_2) + 2k, (y_1 + y_2) + 2k, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))
\end{aligned}$$

para que $h(v + w) = h(v) + h(w)$, es necesario y suficiente que $2k = k$, es decir $k = 0$.

2) Sea pues $k = 0$; y sea $v = (x, y)$, entonces $\forall\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda v = (\lambda x, \lambda y)$

$$\begin{aligned}
h(\lambda v) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda x + \lambda y)\\
\lambda h(v) &= \lambda(x, y, x + y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda(x + y)) = (\lambda x, \lambda y, \lambda x + \lambda y) = h(\lambda v)
\end{aligned}$$

luego, h es lineal si y sólo si $k = 0$.

Nota: no hace falta probar 2 para $k \neq 0$ ya que de todos modos la aplicación no sería lineal.

Observación: Sean E y F dos espacios vectoriales sobre K de dimensiones (finitas) n y m respec. y una aplicación $f : E \Longrightarrow F$, $f(v) = f(x_1, \ldots, x_n) = w = (y_1, \ldots, y_m)$, con x_i e y_i las coordenadas de los vectores $v \in E$ y $w \in F$ respecto a bases de E y F previamente escogidas. f es lineal si y sólo si las coordenadas y_i son polinomios homogéneos de grado 1 en las variables $x_1, \dots, x_n$: $y_1 = a_1^1 x_1 + \dots a_n^1 x_n$, $\dots$, $y_m = a_1^m x_1 + \dots a_n^m x_n$, y la matrriz de la aplicación en las bases dadas es

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

esto es cada fila de la matriz esta formada por los coeficientes del polinomio correspondiente.

2. Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ lineal, de la cual se sabe que

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2,3) = (6,4,31) \\ f(2,0,1) = (3,6,12) \\ f(0,1,0) = (0,1,2) \end{array}\right\}$$

Hallar la matriz de f en la base natural.

Solución:

Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base natural, para dar la matriz de f en dicha base necesitamos conocer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ expresados en la base natural

$$\begin{aligned} (1,2,3) &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ f(1,2,3) &= f(e_1 + 2e_2 + 3e_3) = f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) = \\ &= (6,4,31) = 6e_1 + 4e_2 + 31e_3 \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que

$$\begin{aligned} f(2,0,1) &= 2f(e_1) + f(e_3) = 3e_1 + 6e_2 + 12e_3 \\ f(0,1,0) &= f(e_2) = e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

es decir, tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) = 6e_1 + 4e_2 + 31e_3 \\ 2f(e_1) + f(e_3) = 3e_1 + 6e_2 + 12e_3 \\ f(e_2) = e_2 + e_3 \end{array}\right\}$$

que, despejando $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= \frac{3}{5}e_1 + \frac{16}{5}e_2 + \frac{9}{5}e_3 = (\frac{3}{5}, \frac{16}{5}, \frac{9}{5}) \\
f(e_2) &= e_2 + 2e_3 = (0,1,2) \\
f(e_3) &= \frac{9}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2 + \frac{42}{5}e_3 = (\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{42}{5})
\end{aligned}$$

luego, la matriz será

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{9}{5} \\ \frac{16}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & 2 & \frac{42}{5} \end{pmatrix}$$

Otra forma de resolver el problema:

Puesto que $(1,2,3),(2,0,1),(0,1,0)$ son independientes forman una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbf{R}^3$.

Fijando esta base en el espacio de partida, y fijando la natural en el espacio de llegada, la matriz de la aplicación en estas bases es

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 31 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

y tenemos el diagrama :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}^3_{v_i} & \xrightarrow{B} & \mathbf{R}^3_{e_i} \\
{\scriptstyle S^{-1}}\uparrow & & \\
\mathbf{R}^3_{e_i} & &
\end{array}$$

Luego $A = BS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{9}{5} \\ \frac{16}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & 2 & \frac{42}{5} \end{pmatrix}$

3. Sea E un espacio vectorial sobre K de dimensión $n > 1$ ¿Qué desigualdad verifican los rangos de dos endomorfismos f, g de E tales que $g \circ f = 0$?

Solución:

Si $g \circ f = 0$, entonces para todo $x \in E$ se tiene $g(f(x)) = 0$, lo que implica que Imf está contenido en $Kerg$; entonces $dim\ Imf \leq dim\ Kerg$, lo que equivale a decir

$$rango\ f + rango\ g \leq n$$

(ya que $dim\, kerg + rango\ g = n$)

4. Demostrar que la aplicación $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - 2y, z + y)$ es lineal. Hallar su matriz en las bases naturales y su rango. Encontrar una base de $Kerg$ y otra de Imf .

Solución:

Veamos la linealidad:

Sean $v = (x_1, y_1, z_1), \quad w = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} f(v + w) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \\ &= ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2), (z_1 + z_2) + (y_1 + y_2)) = \\ &= ((x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2), (z_1 + y_1) + (z_2 + y_2)) = \\ &= (x_1 - 2y_1, z_1 + y_1) + (x_2 - 2y_2, z_2 + y_2) = f(v) + f(w) \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbf{R}$ sea $v = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - 2\lambda y, \lambda z + \lambda y) = \\ &= (\lambda(x - 2y), \lambda(z + y)) = \lambda(x - 2y, 2 + y) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

luego, en efecto es lineal.

Hallemos la matriz de la aplicación, calculando la imagen de los vectores de la base natural de $\mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0) \\ f(0,1,0) &= (-2,1) \\ f(0,0,1) &= (0,1) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rango\ A = 2 = dim\ Imf = \mathbf{R}^2$ (= número de vectores columna de A que son linealmente independientes).

$$dim\ Kerf = 3 - rangof = 3 - 2, = 1$$

una base de Imf puede ser $\{(1,0),(0,1)\}$;

determinemos ahora una de $Kerf$

$v \in Kerf$ si y sólo si $f(v) = 0$. Sea pues $(x,y,z) \in Kerf$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $Kerf = \{(x,y,z)/x-2y=0, y+z=0\}$ y una base puede ser: tomando $y=1$ las componentes x,z son: $x=2$, $z=-1$ y el vector de la base es $(2,1,-1)$.

De hecho, los dos primeros apartados y según la observación del problema 1 podemos resolverlo de la manera: f es lineal ya que la imagen de un vector dado en coordenadas, es un vector cuyas coordenadas son polinomios homogéneos de grado 1 en las variables del vector inicial. La matriz de la aplicación viene dada por los coeficientes de dichos polinomios.

5. Un endomorfismo $f \in L(E_2)$ tiene por matriz en la base $\{e_1, e_2\}$ de E_2 a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar su matriz en la base $\{e'_1, e'_2\}$ dada por

$$\begin{aligned} 2e'_1 &= e_1 + e_2 \\ 2e'_2 &= e_2 - e_1 \end{aligned}$$

Solución:

Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbf{R}^2 \\ {\scriptstyle\varphi_B}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\varphi_B^{-1}} \\ E_2 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ {\scriptstyle\varphi_A}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_A^{-1}} \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

La relación entre ambas matrices es

$$B = S^{-1}AS$$

siendo $S = \varphi_A^{-1}\varphi_B$ la matriz cambio de base que para la base $\{e_1,\ e_2\}$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Necesitamos conocer S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Sea $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación lineal definida por

$$f(x, y) = (2x - y, x + y, 2y - x)$$

a) Dar la matriz de f en las bases naturales de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente; calcular $f(3,\frac{1}{2})$.

b) Dar una base, y la dimensión de $Ker f$ y de $Im f$.

c) Dar la matriz de f en las bases $\{v_1,\ v_2\}$, $\{u_1,\ u_2,u_3\}$, siendo

$$\left.\begin{array}{l} v_1=(2,1) \\ v_2=(0,3) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} u_1=(1,1,1) \\ u_2=(2,0,1) \\ u_3=(0,0,2) \end{array}\right\}$$

Calcular $f(\frac{1}{2}v_1+(-\frac{1}{3})v_2)$.

Solución:

a) $f(1,0)=(2,1,-1)$, $f(0,1)=(-1,1,2)$, luego la matriz de f en las bases naturales es

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y}$$

$$f(3,\frac{1}{2})=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{7}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $Ker f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2/f(x,y)=0\}$, luego

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ x+y=0 \\ -x+2y=0 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible y determinado luego $Ker f=\{(0,0)\}$ y $dim\ Ker f=0$, por lo tanto

$$dim\ Im f=dim\ \mathbf{R}^2-dim\ Ker f=2 \qquad \text{y}$$
$$Im f=[(2,1,-1),(-1,1,2)]$$

c) Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^3 \\ {\scriptstyle S}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{-1}} \\ \mathbf{R}^2_{\{v_i\}} & \xrightarrow{B} & \mathbf{R}^3_{\{u_i\}} \end{array}$$

siendo $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de paso de la base $\{v_1,\ v_2\}$ a la natural y $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de paso de la base $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ a la natural. Necesitamos T^{-1}

$$T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$B = T^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

finalmente, si hacemos

$$\begin{aligned} f(\frac{3}{2}v_1 + (-\frac{1}{3}v_2)) &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \\ -\frac{13}{4} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{7}{2}u_1 + u_2 - \frac{13}{4}u_3 \end{aligned}$$

observamos que $\frac{3}{2}v_1 + (-\frac{1}{3})v_2 = \frac{3}{2}(2,1) - \frac{1}{3}(0,3) = (3, \frac{1}{2})$; luego

$$\frac{7}{2}u_1 + u_2 - \frac{13}{4}u_3 = (\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, -2)$$

7. Sean E, F, G tres K-espacios vectoriales (de dimensión finita), y sean

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow G \\ g &: F \longrightarrow G \end{aligned}$$

dos aplicaciones lineales. Demostrar que es condición necesaria y suficiente para que exista al menos una aplicación $h : E \longrightarrow F$ tal que $g \circ h = f$, que $Imf \subset Img$.

Solución:

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & F \\ f\big\downarrow & & g \\ G & & \end{array}$$

Veamos que la condición es necesaria. Sea $y \in Imf$; existe pues $x \in E$, tal que $f(x) = y$;

si $g \circ h = f$ se tiene $g(h(x)) = f(x) = y$, es decir, existe $z \in F$ $\quad (z = h(x))$, tal que $g(z) = y$. Por lo tanto, $Imf \subset Img$.

Veamos que la condición es suficiente. Consideremos $Kerg \subset F$ y sea $F_1 \subset F$, tal que $F = Ker\,g \oplus F_1$.

Dado $x \in E$, vamos a definir $h(x)$. Sea $f(x) \in Imf \subset Img$, luego existe $y \in F$ tal que $g(y) = f(x)$ con $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in Kerg$, $y_2 \in F_1$. Luego $g(y) = g(y_2)$.

Definimos $h(x) = y_2$. h está bien definido, pues sean $y = y_1 + y_2, \overline{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$ tales que $g(y) = g(\overline{y})$; entonces $y - \overline{y} \in Kerg$; puesto que $y_2 - \overline{y_2} \in F_1$ y $y - \overline{y} \in Kerg$, se tiene que $y_2 - \overline{y_2} \in Kerg \cap F_1 = \{0\}$; luego $y_2 = \overline{y_2}$.

8. Sea $\mathbf{R}[x]$ el espacio de los polinomios a coeficientes reales. Definimos $D, M : \mathbf{R}[x] \longrightarrow \mathbf{R}[x]$ mediante

1) $D(P(x)) = P'(x)$ polinomio derivado.

2) $M(P(x)) = xP(x)$

a) Probar que D y M son lineales.

b) ¿Es D nilpotente? (diremos que $f \in L(E)$ es nilpotente si existe $n \in \mathbf{N}$, tal que $f^n = 0$).

c) Probar que $DM - MD = I$.

d) Deducir de ello que $(DM)^2 = D^2M^2 - DM$.

Solución:

a) Veamos que se cumplen las dos condiciones

$$D(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x) = D(p(x)+D(q(x))$$
$$D(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda D(p(x))$$

luego D es lineal.

$$M(p(x)+q(x)) = x(p(x)+q(x)) = xp(x)+xq(x) = M(p(x))+M(q(x))$$
$$M(\lambda p(x)) = x(\lambda p(x)) = \lambda xp(x) = \lambda M(p(x))$$

luego M es lineal.

b) Si existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $D^n = 0$, implica que para todo $p(x) \in \mathbf{R}[x]$, es $D^n p(x) = 0$

Sea $q(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_0$, con $a_{n+1} \neq 0$,

$$\begin{aligned} D^n(q(x)) = D^{n-1}(D(q(x)) = D^{n-1}(a_{n+1}(n+1)x^n + \ldots + a_1) = \\ = \ldots = a_{n+1}(n+1)! \neq 0 \end{aligned}$$

contradicción. Luego D no es nilpotente.

Nótese que $\mathbf{R}[x]$ es de dimensión infinita, y que si nos restringimos a $D_{|\mathbf{R}_n[x]} : \mathbf{R}_n[x] \longrightarrow \mathbf{R}_n[x]$ entonces sí que es nilpotente, pues $D^{n+1} = 0$

c) Dadas $f, g \in End(E)$ entonces $f = g \Leftrightarrow \forall x \in E\ f(x) = g(x)$, en nuestro caso:

$$(DM - MD)(p(x)) = D(M(p(x))) - M(D(p(x))) =$$
$$D(xp(x)) - M(p'(x)) = p(x) + xp'(x) - xp'(x) = p(x) = I(p(x))$$

luego $DM - MD = I$

d) $(DM)^2 = (DM)(DM) = D(MD)M = D(DM - I)M = (D^2M - D)M = D^2M^2 - DM$

9. Sea E el espacio de las matrices cuadradas a coeficientes en $\mathbf{C}$ de orden 2. Definimos una aplicación f de E en $\mathbf{C}$ de la forma

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})) = a + d$$

a) Probar que f es lineal.

b) Probar que si A, B son dos elementos cualesquiera de E, se tiene $f(AB) = f(BA)$.

c) Demostrar que es imposible encontrar dos elementos de E tales que

$$AB - BA = I$$

d) Dar una base de $Ker\, f$.

Solución:

a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(A+A') &= f(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}) = a + a' + b + b' = \\ &= a + d + a' + d' = f(A) + f(A') \\ f(\lambda A) &= f(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}) = \lambda a + \lambda d = \lambda(a+d) = \lambda f(A) \end{aligned}$$

luego f es lineal.

Otra forma: escogidas bases $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para E y 1 para **C**, la aplicación se expresa:

$$f(a, b, c, d) = a + d$$

y ahora podemos aplicar la observación dada en el problema 1.

b) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

$$f(AB) = aa' + bc' + cb' + dd' = a'a + b'c + c'b + d'd = f(BA)$$

c) Puesto que $f(AB) = f(BA)$ se tiene que $f(AB - BA) = 0$, o sea que, para todo A, $B \in E$ se tiene que $AB - BA \in ker\, f$. Si $I = AB - BA$ para unas ciertas matrices A, B se tendría $I \in ker\, f$, pero $f(I) = 2 \neq 0$; luego, para todo A, $B \in E$ es $AB - BA \neq I$.

(Comparar dicho resultado con el hallado en el apartado c, del problema anterior).

d) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in ker\, f$ es $a = -d$; luego

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

$A_1, A_2, A_3 \in ker\, f$, generan $ker\, f$ y son linealmente independientes, luego son base de $ker\, f$.

10. Sea E un espacio vectorial sobre K, cuerpo conmutativo de característica distinta de dos. Diremos que $p \in End(E)$ es un proyector si y sólo si $p^2 = p$.

a) Comprobar que: p es proyector $\Leftrightarrow I - p$ es proyector.

b) Comprobar que: p es proyector $\Rightarrow Imp \oplus Kerp = E$

c) ¿ Es cierto el recíproco de b?

d) Si p_1, p_2 son proyectores, comprobar que $p_1 + p_2$ es proyector si y sólo si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

Solución:

a) $\Rightarrow$) $(I-p)^2 = I^2 + p^2 - Ip - pI = I^2 + p^2 - 2p \underset{(a)}{=} I + p - 2p = I - p$, luego si p es proyector $I - p$ también lo es.

(a) por ser p proyector

$\Leftarrow$) Puesto que $(I-p)^2 = I - p$, se tiene que $I + p^2 - 2p = I - p$, luego $p^2 - p = 0$, es decir, $p^2 = p$

b) Sea $x \in E$. Consideremos $x - p(x)$; se tiene que

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$$

luego $x - p(x) \in Kerf$.

Obviamente, $x = p(x) + x - p(x) \in Imp + Kerp$.

$$\Rightarrow E \subset Imp + Kerp \subset E \Rightarrow Imp + Kerp = E$$

Veamos que la suma es directa: sea $x \in Ker p \cap Im p$; se tiene $p(x) = 0$ y existe $y \in E$, tal que $p(y) = x$, luego $0 = p(x) = p^2(y) \underset{(a)}{=} p(y) = x$.

Entonces $E = Im p \oplus Ker p$

(a) por ser p proyector

c) Consideremos $E = \mathbf{R}^2$ y f tal que su matriz en la base natural sea $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se tiene $Im f = [(1,0)]$, $Ker f = [(0,1)]$, luego $\mathbf{R}^2 = Im f \oplus Ker f$. Sin embargo, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego f no es proyector.

Nota: En un espacio de dimensión finita E se tiene siempre que

$$dim\ E = dim\ Im f + dim\ Ker f$$

para todo $f \in End E$, pero esto no implica $E = Im f \oplus Ker f$. Para ello veamos un ejemplo:

Sea $\mathbf{R}^2$ y f tal que en la base natural sea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos $Im f = [(0,1)]$ y $Ker f = [(0,1)]$, luego $Im f = Ker f$ y no pueden formar sumar directa; pero

$$dim\, Im f + dim\, Ker f = 1 + 1 = 2 = dim\, \mathbf{R}^2$$

d) Sean p_1, p_2 proyectores. Si $p_1 + p_2$ es proyector $\Rightarrow (p_1+p_2)^2 = p_1 + p_2$ pero

$$(p_1+p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = p_1 + p_2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1$$

luego $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$; luego $p_1 \circ p_2 = -p_2 \circ p_1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} p_1 \circ (p_1 \circ p_2) &= -p_1 \circ (p_2 \circ p_1) \\ p_1 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2 &= -(p_1 \circ p_2) \circ p_1 \end{aligned}$$

y componiendo esta última igualdad por p_1 por la derecha tenemos

$$(p_1 \circ p_2) \circ p_1 = -((p_1 \circ p_2) \circ p_1) \circ p_1 = -(p_1 \circ p_2) \circ (p_1 \circ p_1) = -(p_1 \circ p_2) \circ p_1$$

luego $p_1 \circ p_2 \circ p_1 = -p_1 \circ p_2 \circ p_1 \Rightarrow 2p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0 \underset{(a)}{\Rightarrow} p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0$; por lo que

$$p_1 \circ p_2 = -p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0$$

luego $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$, y recíprocamente, si p_1, p_2 son proyectores y $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$, se tiene

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = p_1 + p_2$$

luego $p_1 + p_2$, es un proyector.

(a) aquí es donde interviene la hipótesis de $carac\ K \neq 2$

11. Sean $u_1 = (2,-1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,-2,3)$, $u_4 = (6,-1,6)$ vectores de $\mathbf{R}^3$ y sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ una aplicación lineal de la que conocemos $f(u_1) = (1,-1)$, $f(u_2) = (4,1)$ y $f(u_3) = (3,1)$.

a) ¿Es posible determinar $f(u_4)$?, ¿Por qué?

b) La aplicación f ¿será inyectiva? ¿será exhaustiva?

c) Calcular la matriz de f en las bases naturales de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^2$ respectivamente.

d) Determinar una base de $Ker f$.

Solución:

a) Es posible hallar $f(u_4)$ ya que $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman base de $\mathbf{R}^3$.

(En efecto, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$) , por lo tanto

$u_4 = au_1 + bu_2 + cu_3$ y $f(u_4) = af(u_1) + bf(u_2) + cf(u_3)$

b) f no puede ser inyectiva, ya que

$$dim\ Ker f = dim\ \mathbf{R}^3 - dim\ Im f \geq 3 - 2 = 1 \neq 0$$

($dim\ Im f \leq 2$ puesto que $Im f \subset \mathbf{R}^2$) .

f será exhaustiva en caso de que $dim\ Im f = 2$. Veamos si es así: la matriz de f en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ y la natural de $\mathbf{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad rango\, A = 2 = rango \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matriz de f en las bases naturales será

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3_{u_i} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2 \\ S \big\downarrow & & A' \\ \mathbf{R}^3_{e_i} & & \end{array}$$

S es la matriz de cambio de base de $\{u_1, u_2, u_3\}$ a la natural $\{e_1, e_2, e_3\}$, y $A' = AS^{-1}$ con

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{20}{6} & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

d) $Ker f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{20}{6} & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 20y + 18z &= 0 \\ -x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado de $rango\, , = 2$ cuyo conjunto de soluciones es

$$Ker f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y = -\frac{15}{16} z \; x = \frac{3}{16} z\} = [(3, 15, 16)]$$

12. Encontrar los valores de a para los cuales el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ dado por $f(x, y, z) = (x + ay - az, ax + y + z, -ax + ay + z)$ es un automorfismo.

Solución:

f será automorfismo si el determinante de su matriz asociada, en cualquier base, es distinto de cero. Busquemos pues la matriz de f en la base natural (por ejemplo).

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,a,-a) \\ f(0,1,0) &= (a,1,a) \\ f(0,0,1) &= (-a,1,1) \end{aligned}$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & 1 \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$$

y $det\, A = 1 - a - 3a^2 - a^3 = -(a+1)(a+1-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2})$, luego $det\, A \neq 0$ si y sólo si a es distinto de

$$-1, \quad -1+\sqrt{2}, \quad -1-\sqrt{2}$$

13. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

asociada a la aplicación lineal f definida sobre $\mathbf{R}^3$ respecto la base natural.

a) Hallar los subespacios $Im\, f$ y $Ker\, f$.

b) Hallar una base de $\mathbf{R}^3$ para la cual la matriz de f en dicha base sea

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Recordando la definición de $Im\,f$ y de $Ker\,f$:

$$\begin{aligned}
Imf &= \{y \in \mathbf{R}^3 / \exists x \in \mathbf{R}^3 \quad \text{con} \quad f(x) = y\} = \\
&= [f(1,0,0),\, f(0,1,0),\, f(0,0,1)] = \\
&= [(0,0,0),\, (2,0,0),\, (1,3,0)] = [(2,0,0),(1,3,0)] \\
Kerf &= \{x \in \mathbf{R}^3 / f(x) = 0\} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2y + z &= 0 \\ 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \\
&\Rightarrow Kerf = [(1,0,0)]
\end{aligned}$$

De hecho, observando la matriz A que es de $rango\, 2$ y la primera columna es idénticamente nula, ya podemos afirmar que $Kerf = [(1,0,0)]$

b) Buscamos $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$, $v_3 = (z_1, z_2, z_3)$ tales que formen base, y si

$$S = , \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

entonces $SB = AS$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} x_2 = x_3 = y_3 &= 0 \\ 2y_2 &= x_1 \\ 3z_3 &= y_2 \\ 2z_2 + z_3 &= y_1 \end{aligned}\right\}$$

y podemos tomar:

$$v_1 = (6,0,0) \quad v_2 = (1,3,0) \quad v_3 = (0,0,1)$$

14. Se considera la aplicación $f_k : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definida por

$$f_k(x,y,z) = ((2-k)x + (k-1)y, 2(1-k)x + (2k-1)y, kz)$$

a) Determinar la matriz de f_k asociada a la base natural de $\mathbf{R}^3$

b) Determinar $Ker f_k$

c) Supuesto $k(k-1) \neq 0$, demostrar que la matriz M_k puede ponerse de la forma $M_k = A + kB$ donde A y B son dos matrices a determinar, y dar la expresión de M_k^2 en función de A, B y k y deducir de ello una expresión para M_k^n

Solución:

a)

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (2-k, 2(1-k), 0) \\ f(0,1,0) &= (k-1, 2k-1, 0) \\ f(0,0,1) &= (0,0,k) \end{aligned}$$

luego

$$M_k = \begin{pmatrix} 2-k & k-1 & 0 \\ 2(1-k) & 2k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

b) Observamos que $det\, M_k = k^2$, luego, si $k \neq 0$, es $rango f_k = 3$ y, por tanto, $Ker f_k = \{0\}$

Sea pues $k = 0$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el $Ker f_0$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$$

Luego $Ker f_0 = [(1,2,0),(0,0,1)]$

c)

$$M_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A + kB$$

$M_k^2 = (A+kB)^2 = A^2 + k^2B^2 + kAB + kBA$.

Observamos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

luego, $M_k^2 = A + k^2 B$, y por lo tanto, por inducción se concluye que $M_k^n = A + k^n B$, veámoslo:

Es válido para $n = 1$, supuesto cierto para $n-1$: $M_k^{n-1} = A + k^{n-1}B$; veámoslo para n :

$$\begin{aligned} M_k^n &= M_k M_k^{n-1} = M_k(A + k^{n-1}B) = (A + kB)(A + k^{n-1}B) = \\ &= A^2 + k^{n-1}AB + kBA + k^n B^2 = A + k^{n-1}0 + k0 + k^n B = A + k^n B \end{aligned}$$

Nota: si $k = 0$, entonces B podría ser cualquier matriz, y por tanto no tendría por qué ser $AB = BA = 0$. Y si $k = 1$, $M_k = I$ y $M_k^n = I$, si bien la expresión hallada tiene sentido.

15. Sea $\mathbf{R}_n[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Consideremos los endomorfismos $f, D : \mathbf{R}_n[x] \longrightarrow \mathbf{R}_n[x]$ siendo D el operador derivada: $D(p(x)) = p'(x)$ y f tal que $f(p(x)) = p(x) - p'(x)$. Demostrar que existe f^{-1} , y que se puede poner en función del operador D .

Solución:

Sea $p(x) \in Ker f \Rightarrow f(p(x)) = 0 = p(x) - p'(x)$, luego $p(x) = p'(x)$. Pero $grado\ p'(x) \leq grado\ p(x)$, y vale la igualdad, si y sólo si $grado\ p(x) = 0$, luego $p(x) = a$ polinomio constante, pero $p'(x) = (a)' = 0$. Luego $a = 0$ y $p(x) = 0$.

Por lo tanto, f es inyectiva y toda aplicación lineal inyectiva de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo es exhaustiva, y por tanto, existe f^{-1}.

Si f^{-1} se puede poner en función de D esta ha de ser:

$$f^{-1} = \lambda_0 D^0 + \cdots + \lambda_n D^n \quad \text{ya que} \quad D^{n+1} = 0$$

y ha de cumplirse que $f^{-1} \circ f = I$

Notar que: $f = I - D$

$$\begin{aligned} I = f^{-1} \circ f = & \; (\lambda_0 D^0 + \ldots + \lambda_n D^n) \circ (I - D) = \\ = & \; \lambda_0 D^0 + \ldots + \lambda_n D^n - \lambda_0 D^1 - \cdots - \lambda_n^{D^{n+1}} = \\ = & \; \lambda_0 I + (\lambda_1 - \lambda_0) D^1 + (\lambda_2 - \lambda_1) D^2 + \cdots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) D^{n-1} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 - \lambda_0 &= 0 \\ \cdots&\cdot\cdot \\ \lambda_n - \lambda_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_i = 1 \quad i = 1, \cdots, n$$

y $f^{-1} = D^0 + \ldots + D^n$.

Capítulo 5 Determinantes

1. Dadas las permutaciones $s=(4,3,1,2)$, $t=(1,2,4,3)$, determinar las permutaciones $s\circ t$, $t\circ s$, s^{-1}, t^{-1}, así como el signo de cada una de ellas.

Solución:

Recordando que $s=(a,b,c,d)$ significa $s(1)=a$, $s(2)=b$, $s(3)=c$, $s(4)=d$, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} s\circ t(1)=s(t(1))=s(1)=4\\ s\circ t(2)=s(t(2))=s(2)=3\\ s\circ t(3)=s(t(3))=s(4)=2\\ s\circ t(4)=s(t(4))=s(3)=1\end{array}\right\}\qquad s\circ t=(4,3,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} t\circ s(1)=t(s(1))=t(4)=3\\ t\circ s(2)=t(s(2))=t(3)=4\\ t\circ s(3)=t(s(3))=t(1)=1\\ t\circ s(4)=t(s(4))=t(2)=2\end{array}\right\}\qquad t\circ s=(3,4,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{lllllll} \text{De} & s^{-1}(1)=i & \text{tenemos} & s(i)=1 & \text{luego} & i=3\\ \text{De} & s^{-1}(2)=i & \text{tenemos} & s(i)=2 & \text{luego} & i=4\\ \text{De} & s^{-1}(3)=i & \text{tenemos} & s(i)=3 & \text{luego} & i=2\\ \text{De} & s^{-1}(4)=i & \text{tenemos} & s(i)=4 & \text{luego} & i=1\end{array}\right\} s^{-1}=(3,4,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{lllllll} \text{De} & t^{-1}(1)=i & \text{tenemos} & t(i)=1 & \text{luego} & i=1\\ \text{De} & t^{-1}(2)=i & \text{tenemos} & t(i)=2 & \text{luego} & i=2\\ \text{De} & t^{-1}(3)=i & \text{tenemos} & t(i)=3 & \text{luego} & i=4\\ \text{De} & t^{-1}(4)=i & \text{tenemos} & t(i)=4 & \text{luego} & i=3\end{array}\right\} t^{-1}=(1,2,4,3)$$

Veamos cuál es el signo de cada una de estas permutaciones

$$\begin{array}{llll} N(s) = 3+2 = 5 & \text{luego} \quad s & \text{es impar :} & \varepsilon\,(s) = -1 \\ N(t) = 1 & \text{luego} \quad t & \text{es impar :} & \varepsilon\,(t) = -1 \end{array}$$

$$\varepsilon(st) = \varepsilon(s)\cdot\varepsilon(t) = (-1)\cdot(-1) = 1$$

$$\varepsilon(ts) = \varepsilon(t)\cdot\varepsilon(s) = (-1)\cdot(-1) = 1$$

$$\varepsilon(s^{-1}) = \varepsilon(s) = -1$$

$$\varepsilon(t^{-1}) = \varepsilon(t) = -1$$

2. Hallar el valor del determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Recordando la definición de determinante:

$$\text{si} \quad A = (a^i_j),\ det A = \sum_s \varepsilon(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} a_3^{s_3}$$

se tiene

$$|A| = +3\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 0\cdot 1 - 0\cdot 1\cdot 1 = 3+1-2 = 2$$

3. Hallar el valor del determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

a) Por la regla de Laplace, por ejemplo, por los menores de las dos primeras

columnas.

b) Por los elementos de una línea, por ejemplo, de la primera fila.

c) Obteniendo "a priori"ceros en una línea y desarrollando luego por los elementos de ésta (reducción del orden).

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Hay que formar sumas de productos de determinantes 2×2, extraídos de A de manera que las dos columnas del primer factor se correspondan con la primera y segunda columnas de A y las dos columnas del segundo factor se correspondan con la tercera y cuarta columnas de A. Cada factor tendrá dos filas cuya ordenación será una permutación de $\{1,2,3,4\}$.

Por ejemplo

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} (1) \\ (3) \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (4) \end{matrix}, \quad \text{etc.}$$

El signo de cada sumando será el signo de la correspondiente permutación de filas. Por ejemplo, el signo del primer sumando anterior es el signo de la permutación $(1,2,3,4)$, que es $+$, y el del segundo, el de la permutación $(1,3,2,4)$, que es $-$.

Pasemos pues al cálculo de $|A|$

$$\begin{aligned} |A| = &+ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-1) - 11(-19) + 19.12 + 6(-22) - 10.13 + (-1).(-17) = 188. \end{aligned}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} +$$
$$+ 4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 3.117 + 2.41 - 4.40 - 5.17 = 351 + 82 - 160 - 85 = 188.$$

c) Seguiremos un método que nos permite obtener el máximo número de ceros en una línea (fila o columna) a base de sumarle a dicha línea una combinación lineal de las restantes. Por ejemplo, como en la segunda columna hay un cero, empleamos esta columna para rellenarla de ceros

$$\begin{array}{rc} fila\, a & \longrightarrow \\ fila\, b & \longrightarrow \\ fila\, c & \longrightarrow \\ fila\, d & \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

substituimos la fila c por $c-d-a$ (combinación lineal de filas), es decir, le sumamos a la fila c las filas a y d cambiadas de signo)

$$\begin{array}{rc} fila\, a & \longrightarrow \\ fila\, b & \longrightarrow \\ fila\, c & \longrightarrow \\ fila\, d & \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & -7 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

substituimos, por ejemplo, la fila d por $d + \frac{5}{2}a$, quedando

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & -7 & 0 \\ \frac{19}{2} & 0 & 12 & \frac{19}{2} \end{vmatrix}$$

Desarrollando pues por la segunda columna tenemos

$$-(-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & -7 & 0 \\ \frac{19}{2} & 12 & \frac{19}{2} \end{vmatrix} = 2\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & -7 & 0 \\ 19 & 24 & 19 \end{vmatrix} = 188$$

4. Probar que

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x^2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

para $n \geq 2$ (Es el llamado determinante de Van der Monde).

Solución:

Vamos a probarlo por inducción.

Para $n = 2$

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

Supongamos que es cierto para $m = n - 1$, veamos que también lo es para n

$$
V_n \underset{(a)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & x_2^3 - x_2^2x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 & x_3^3 - x_3^2x_1 & \dots & x_3^{n} - x_3^{n-2}x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_nx_1 & x_n^3 - x_n^2x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix} \underset{(b)}{=}
$$

$$
= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & x_2^3 - x_2^2x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 & x_3^3 - x_3^2x_1 & \dots & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_{n-1} & x_n^3 - x_n^2x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix} \underset{(c)}{=}
$$

$$
= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \underset{(d)}{=}
$$

$$
= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)V_{n-1} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)
$$

(a) restando a la segunda columna la primera multiplicada por x_1 y a la tercera la segunda por x_1, ..., y a la n-sima la (n-1)-sima por x_1.

(b) desarrollando por la primera fila.

(c) si una fila o columna está multiplicada por un escalar, éste sale fuera.

(d) el determinante es el de Van der Monde de orden n-1.

5. Calcular

$$
V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b + c & c + a & a + b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}
$$

Solución:

$$
V \underset{(a)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b + c & a - b & a - c \\ bc & ac - bc & ab - bc \end{vmatrix} \underset{(b)}{=} \begin{vmatrix} a - b & a - c \\ c(a - b) & b(a - c) \end{vmatrix} =
$$

$$
= (a - b)(a - c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & b \end{vmatrix} = (a - b)(a - c)(b - c)
$$

(a) restando la primera columna a la segunda y tercera.

(b) desarrolllando por la primera fila.

6. Calcular

$$\triangle = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$$

sabiendo que $z \in \mathbf{C}$ es tal que $z^5 = 1$ y $z \neq 1$

Solución:

$$\triangle = z \cdot z^2 \cdot (z+1) + 0 \cdot z \cdot 0 + 1 \cdot (-z)(-1) - 1 \cdot z^2 \cdot 0 - z \cdot z \cdot (-1) - 0 \cdot (-z)(z+1) = \\ = z^4 + z^3 + z^2 + z$$

Ahora bien, puesto que

$$0 = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

se tiene

$$\left.\begin{matrix} z - 1 = 0 \\ z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ó} \qquad \text{pero} \quad z \neq 1$$

luego $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, de donde $\triangle = -1$

7. Calcular el determinante de orden n siguiente

$$A_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Desarrollando por la primera columna tenemos

$$\begin{aligned}
A_n &= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&\underset{(a)}{=} 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= 2A_{n-1} - A_{n-2}
\end{aligned}$$

(a) desarrollando el segundo determinante por la primera fila

Luego tenemos la relación de recurrencia siguiente

$$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2}$$

que nos permitirá deducir el valor de A_n : tenemos que para $n = 1, 2, 3$ es

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 3, \quad A_3 = 4$$

Supongamos pues que $A_{n-1} = n$; veamos que $A_n = n + 1$

$$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2} = 2n - (n-1) = 2n - n + 1 = n + 1$$

luego $A_n = n + 1$

8. Sin efectuar el desarrollo, probar que

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Sabemos que no se altera el valor de un determinante si a una línea le sumamos una combinación lineal de las demás. Sumando a la tercera columna la segunda, nos queda

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \underset{(a)}{=} 0$$

(a) observando que hay dos columnas iguales

9. Calcular las raíces de la ecuación

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Solución:

Sumando a la primera columna todas las demás tenemos

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} n+x & 1 & \dots & 1 \\ n+x & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+x & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = (n+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(a)}{=} (n+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = (n+x)x^{n-1} = 0$$

(a) restando a cada columna, a partir de la segunda, la primera columna

Luego las raíces son $x = -n$ y $x = 0$ de multiplicidad n-1.

10. Sabiendo que 18887, 39865, 58752, 64872, 96526 son divisibles por 17, demostrar que D es también múltiplo de 17, siendo D el determinante siguiente

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 7 & 2 \\ 9 & 6 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

sin calcular el valor del determinante.

Solución:

Sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} 18887 = 17a \\ 39865 = 17b \\ 58752 = 17c \\ 64872 = 17d \\ 96526 = 17e \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

$$D = \frac{1}{10^4}\begin{vmatrix} 1\cdot 10^4 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 3\cdot 10^4 & 9 & 8 & 6 & 5 \\ 5\cdot 10^4 & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 6\cdot 10^4 & 4 & 8 & 7 & 2 \\ 9\cdot 10^4 & 6 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10^4}\begin{vmatrix} 1\cdot 10^4 + 8\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 7 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 3\cdot 10^4 + 9\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 5 & 9 & 8 & 6 & 5 \\ 5\cdot 10^4 + 8\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 2 & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 6\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 2 & 4 & 8 & 7 & 2 \\ 9\cdot 10^4 + 6\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 6 & 6 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10^4}\begin{vmatrix} 18887 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 39865 & 9 & 8 & 6 & 5 \\ 58752 & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 64872 & 4 & 8 & 7 & 2 \\ 96526 & 6 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{10^4}\begin{vmatrix} 17a & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 17b & 9 & 8 & 6 & 5 \\ 17c & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 17d & 4 & 8 & 7 & 2 \\ 17e & 6 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{17}{10^4}\begin{vmatrix} a & 8 & 8 & 8 & 7 \\ b & 9 & 8 & 6 & 5 \\ c & 8 & 7 & 5 & 2 \\ d & 4 & 8 & 7 & 2 \\ e & 6 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{17}{10^4}\cdot D'$$

$D = \frac{17}{10^4} \cdot D'$; puesto que $mcd(17 \cdot 10^4) = 1$ y $D, D' \in \mathbf{Z}$, se tiene que $D' = 10^4 \cdot h$ y por tanto $D = 17h$

11. Determinar la inversa de la matriz $A = (a_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}(A_{ij})$$

Siendo

$$A_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nota: $A_{ij} = A^t_{ji}$

Luego, $\det \quad A = 5$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Capítulo 6 Diagonalización de endomorfismos

1. Sea E un $\mathbf{R}$-espacio vectorial y f un endomorfismo de E cuya matriz en una determinada base $\{u_1, u_2, u_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar el polinomio característico $Q(t)$.

$$\begin{aligned} Q(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 3 & 1 & 0-t \end{vmatrix} &= \\ = -t^3 + (trA)t^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})t + detA &= \\ &= -t^3 + 2t^2 + 4t + 7 \end{aligned}$$

Nota A_{ii} es el determinante del menor adjunto al elemento a_{ii} de la matriz A .

2. Determinar el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

dando sus raíces.

Solución:

$$\begin{aligned}
det(A-tI) &= \begin{vmatrix} (a+b)^2-t & ab & ab & b^2 \\ (a+b)^2-t & a^2-t & b^2 & ab \\ (a+b)^2-t & b^2 & a^2-t & ab \\ (a+b)^2-t & ab & ab & a^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-t & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2-t & ab \\ 1 & ab & ab & a^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2-ab-t & b^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & b^2-ab & a^2-ab-t & ab-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)\begin{vmatrix} a^2-ab-t & b^2-ab & ab-b^2 \\ b^2-ab & a^2-ab-t & ab-b^2 \\ 0 & 0 & a^2-b^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)\begin{vmatrix} a^2-ab-t & b^2-ab \\ b^2-ab & a^2-ab-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)\begin{vmatrix} a^2+b^2-2ab-t & b^2-ab \\ a^2+b^2-2ab-t & a^2-ab-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2)(a^2-b^2-t)((a-b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ab \\ 1 & a^2-ab-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)((a-b)^2-t)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ab \\ 0 & a^2-b^2-t \end{vmatrix} = \\
&= ((a+b)^2-t)(a^2-b^2-t)^2((a-b)^2-t)
\end{aligned}$$

y por lo tanto, las raíces son $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, (a^2-b^2) , y esta última de multiplicidad dos.

3. Si $A \in M_n(K)$ es una matriz inversible, demostrar que AB y BA tienen los mismos valores propios (siendo K un cuerpo conmutativo).

Solución:

En efecto,

$$\begin{aligned} det(AB - I) &= det(ABAA^{-1} - \lambda IAA^{-1}) = det(ABAA^{-1} - A\lambda IA^{-1}) = \\ &= det(A(BA - \lambda I)A^{-1}) = detAdet(BA - \lambda I)detA^{-1} = \\ &= det(BA - \lambda I) \end{aligned}$$

4. Demostrar que si la matriz $A \in M_n(K)$ verifica $A^m = 0$, el único valor propio posible de A es el cero (donde K es un cuerpo conmutativo).

Solución:

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $\lambda \neq 0$ que sea valor propio de la matriz A , lo que equivale a que λ sea un valor propio del endomorfismo f del espacio vectorial K^n cuya matriz en determinada base es A y esto significa que existe un vector $v \in K^n$, $v \neq 0$ tal que $f(v) = \lambda v \neq 0$

Y aplicando f a ambos miembros de la igualdad se tiene

$$f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$$

luego λ^2 es un valor propio no nulo de f^2 y por tanto de A^2

inductivamente tenemos que $f^m = \lambda^m v \neq 0$, en efecto:

Sabemos que es cierto para $m = 1,2$ supongamos que lo es para $m-1$ veamos que lo es para m

$$f(f^{m-1}v) = f(\lambda^{m-1}v) = \lambda^{m-1}f(v) = \lambda^{m-1}\lambda v = \lambda^m v$$

Por lo tanto tenemos que λ^m es valor propio no nulo de la matriz $A^m = 0$ lo cual es absurdo.

5. Se define $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$ $\forall$ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Comprobar que f es lineal y hallar su matriz en la base natural. Hallar el polinomio característico y los valores propios. ¿Es f diagonalizable?

Solución:

Veamos la linealidad:

$\forall v = (x_1, x_2, x_3),\ w = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ y $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(v+w) &= (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = f(v) + f(w) \\ f(\lambda v) &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) = \lambda(x_1, x_2, 0) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

Determinemos la matriz de la aplicación f

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 \\ f(e_2) &= e_2 \\ f(e_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

luego la matriz de f en la base natural es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

El polinomio característico es:

$$det(f - tI) = (1-t)^2(-t) = -t^3 + 2t^2 - t$$

(obvio ya que la matriz es diagonal)

Los valores propios son los valores $\lambda \in \mathbf{R}$ tales que $\exists v \in \mathbf{R}^3\ v \neq 0$ con $f(v) = \lambda v$ y estos valores son las raíces del polinomio característico:

$$(1-t)^2(-t) = 0 \quad t = 1 \text{ doble}, \quad t = 0$$

f diagonaliza puesto que $dim\, Ker(f - I) = 2$.

En (1) observamos ya que la base natural es la base de vectores propios, (f es la "proyección ortogonal"sobre el plano horizontal XY), y en (2) vemos que la matriz es diagonal.

6. Diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 2 & 8 \\ 20 & -3 & -8 \\ -60 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

hallando una base de vectores propios de f (endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz en la base natural es A).

Solución:

Busquemos el polinomio característico de A :

$$det(A - tI) = -t^3 - t^2 + t + 1 = -(t+1)^2(t-1)$$

por lo tanto

$$\mathbf{R}^3 = Ker(f+I)^2 \oplus Ker(f-I)$$

$$dim\, Ker(f+I) = 3 - rango \begin{pmatrix} -20 & 2 & 8 \\ 20 & -2 & -8 \\ -60 & 6 & 24 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

luego A diagonaliza y

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la nueva base será $\{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1, v_2 \in Ker(f+I)$ y $v_3 \in Ker(f-I)$

$$\begin{aligned} Ker(f+I) &= \{(x,y,z) / \begin{pmatrix} -20 & 2 & 8 \\ 20 & -2 & -8 \\ -60 & 6 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \\ &= \{(x,y,z) / -10x + y + 4z = 0\} \end{aligned}$$

subespacio de dimensión dos, del que seleccionamos una base

$$v_1 = (2,0,5), \quad v_2 = (1,2,2)$$

$$\begin{aligned} ker(f-I) &= \{(x,y,z)/\begin{pmatrix} -22 & 2 & 8 \\ 20 & -4 & -8 \\ -60 & 6 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \\ &= \{(x,y,z)/-11x+y+4z=0; \quad 10x-2y-4z=0\} \end{aligned}$$

subespacio de dimensión uno del que seleccionamos una base

$$v_3 = (-1,1,-3)$$

7. Estudiar la diagonalización, según los distintos valores de $\alpha \in \mathbf{R}$, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dando en el caso en que ello sea posible una matriz S tal que $S^{-1}AS$ sea diagonal.

Solución:

Busquemos el polinomio característico:

$$det(A-tI) = -(t-1)^2(t-2)$$

luego los valores propios de A son $t_1 = 1$ doble y $t_2 = 2$.

Para que A diagonalice, ha de verificarse:

$$1 \leq dim\ ker(A-t_iI) = \text{multiplicidad de la raíz } t_i$$

Estudiemos pues el caso $t_1 = 1$

$$dim\ Ker(A-I) = 3 - rango \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3-1=2 & \text{para} \quad \alpha = 0 \\ 3-2=1 & \text{para} \quad \alpha \neq 0 \end{cases}$$

luego, sólo diagonaliza para $\alpha = 0$. Sea pues $\alpha = 0$ y busquemos la matriz S (matriz de los vectores propios).

Sean $\{v_1, v_2\}$ base de $Ker\ (A-I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sean pues $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$

y $\{v_3\}$ base de $Ker\ (A+I)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x &= 0 \\ -y-z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sea pues $v_3 = (0,1,-1)$

luego $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y en efecto, se tiene que $D = S^{-1}AS$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: En este caso $S = S^{-1}$

8. Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ un endomorfismo diagonalizable que admite por vectores propios a los $v_1 = (-1,2,2)$, $v_2 = (2,2,-1)$, $v_3 = (2,-1,2)$ y sabemos que $f(5,2,5) = (0,0,7)$. Hallar los valores propios de f.

Solución:

Puesto que $f(v_i) = \lambda_i v_i$ expresaremos los vectores $(5,2,5)$ y $(0,0,7)$ en la base formada por los vectores propios de f y aplicamos f, al primero

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} f(1,1,2) &= f(v_1 + v_2 + 2v_3) = f(v_1) + f(v_2) + 2f(v_3) = \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + 2\lambda_3 v_3 = \frac{14}{9}v_1 - \frac{7}{9}v_2 + \frac{14}{9}v_3 \end{aligned}$$

Y $\lambda_1 = \frac{14}{9}$ $\lambda_2 = -\frac{7}{9}$ $\lambda_3 = \frac{7}{9}$ ya que $\{v_i\}$ es una base del espacio y la expresión de un vector en una determinada base es única.

9. Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^n$. Probar que si $\lambda \in \mathbf{R}$ es un valor propio de f entonces λ^p es un valor propio de f^p $\forall p \in \mathrm{N}$ y los subespacios propios respectivos E, E_p son tales que $E \subset E_p$. Dar un ejemplo en el que $E \neq E_p$.

Solución:

Sea λ un valor propio, existe pues un vector $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $f(x) = \lambda x$; luego

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

es decir λ^2 es valor propio de f^2 de vector propio x .

Supongamos que hemos probado que también λ^{p-1} es valor propio de f^{p-1} de vector propio x , entonces

$$f^p(x) = f(f^{p-1}(x)) = f(\lambda^{p-1}x) = \lambda^{p-1}f(x) = \lambda^{p-1}\lambda x = \lambda^p x$$

luego λ^p es valor propio de f^p de vector propio x , y obviamente, para todo vector x propio de valor propio λ de f , podemos aplicarle el razonamiento anterior, y se tiene

$$E \subset E_p$$

Veamos que la igualdad en general es falsa; sea $f \in End(\mathbf{R}^3)$ tal que su matriz en la base natural es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\{e_3\}$ es el subespacio de vectores propios de valor propio cero. Sin embargo f^2 es tal que su matriz en la base natural es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\{e_2, e_3\}$ es el subespacio de vectores propios de valor propio cero y claramente

$$E \not\subset E_2$$

10. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar A^n , para todo $n \in \mathbf{N}$.

Solución:

Si D es una matriz diagonal $D = (\lambda_{ii})$ se tiene claramente $D^n = (\lambda_{ii}^n)$

Si A es diagonalizable, existe S tal que $D = S^{-1}AS$ y

$D^n = (S^{-1}AS)^n = S^{-1}A^nS$ luego $A^n = SD^nS^{-1}$

Veamos si A es diagonalizable:

$det(A - tI) = -(t+1)^2(t+5)$

los valores propios son $t = -1$ doble y $t = 5$.

$$dim\ Ker(A+I) = 3 - rango \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

luego A diagonaliza.

Busquemos la matriz S :

$v_1, \quad v_2 \in Ker(A+I)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_1 &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ v_2 &= (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}) \end{aligned} \right\}$$

$v_3 \in Ker(A - 5I)$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_3 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

luego

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Y

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & 5^n \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$A^n = SD^nS^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}5^n \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & (-1)^n\frac{1}{3} + \frac{1}{3}5^n \\ \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & (-1)^n\frac{2}{3} + \frac{1}{3}5^n \end{pmatrix}$$

11. a) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

b) Sean $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$, $B \in M_{m,m}(\mathbf{C})$, $C \in M_{n,m}(\mathbf{C})$, tales que $AC - CB = \lambda C$. Probar que

$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad A^pC = C(\lambda I_m + B)^p$$

c) Sea $E = M_{n,m}(\mathbf{C})$ y f un endomorfismo de E definido de la forma $f(X) = AX - XB$ con $A \in M_{n,n}(\mathbf{C})$ y $B \in M_{m,m}(\mathbf{C})$ fijas. Probar que $\lambda \in \mathbf{C}$ es un valor propio de f si y sólo si $\lambda = \mu_i - \nu_j$ con μ_i y ν_j valores propios de los endomorfismos de $\mathbf{C}^n$ y $\mathbf{C}^m$ asociados a las matrices A y B respectivamente.

Solución:

a) En efecto: $det\,(A-\lambda I) = det\,(A-\lambda I)^t = det\,(A^t-\lambda I)$

b) Veámoslo por inducción respecto a p. Se verifica claramente para $p=1$: de $AC-CB=\lambda\cdot C$ tenemos

$$AC = \lambda C + CB = C(\lambda I_m) + CB = C(\lambda I_m + B)$$

supongamos ahora que es cierto para p y veamos que lo es para $p+1$

$$\begin{aligned} A^{p+1}C &= AA^pC = A(C(\lambda I_m+B)^p) = (AC)(\lambda I_m+B)^p = \\ &= (C(\lambda I_m+B))(\lambda I_m+B)^p = C(\lambda I_m+B)^{p+1} \end{aligned}$$

c) Sea $\{\mu_1,\dots\mu_n\}$ el conjunto de valores propios de A y $\{\nu_1,\dots,\nu_j\}$ el conjunto de valores propios de B

Sea μ_i un valor propio de A, existe v vector columna de $\mathbf{C}^n-\{0\}$ tal que $Av=\mu_i v$.

Sea ν_j un valor propio de B entonces, por a, es también valor propio de B^t, por lo que existe w vector columna de $\mathbf{C}^m-\{0\}$ tal que $B^t w=\nu_j w$ y por tanto $w^tB=\nu_j w^t$

Sea ahora $X=v\cdot w^t\in M_{n,m}(\mathbf{C})$;

$$\begin{aligned} f(X) &= AX-XB = Av\cdot w^t - v\cdot w^tB = \\ &= \mu_i v\cdot w^t - \nu_j v\cdot w^t = (\mu_i-\nu_j)v\cdot w^t = (\mu_i-\nu_j)X \end{aligned}$$

por lo que $\mu_i-\nu_j$ es un valor propio de f

Recíprocamente

Sea $X\neq 0$ un vector propio de f de valor propio λ ($f(X)=\lambda X$)

Sea $P(t)=(-1)^n(t-\mu_1)\dots(t-\mu_n)$ (los μ_i no necesariamente distintos) el polinomio característico de A (recuérdese que $\mathbf{C}$ es algebraicamente cerrado por lo que todos los factores primos de $P(t)$ son de grado 1).

Por el teorema de Cayley-Hamilton $P(A)=0$ por lo que $P(A)X=0$. Ahora bien, por b, $P(A)X=XP(\lambda I_m+B)$.

Tenemos pues

$$\begin{aligned} 0 &= XP(\lambda I_m+B) = X(\lambda I_m-\mu_1 I_m)\dots(\lambda I_m-\mu_n I_m) = \\ &= X((\lambda-\mu_1)I_m+B)\dots((\lambda-\mu_n)I_m+B) = XC, \qquad C\in M_{m,m}(\mathbf{C}) \end{aligned}$$

X es una matriz no nula por lo que C no puede ser de rango máximo:

$$det\, C = \prod_{i=1}^{n} (det\, ((\lambda - \mu_i)I_m + B)) = 0$$

existe, pues, algún i para el cual $det\, ((\lambda - \mu_i)I_m + B) = 0$ es decir $-(\lambda - \mu_i)$ es un valor propio de B por lo que existe algún j para el cual $\nu_j = -(\lambda - \mu_i)$, es decir $\lambda = \mu_i - \nu_j$.

Capítulo 7 Forma reducida de Jordan

1. Hallar el polinomio anulador de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

sin utilizar el polinomio característico.

Hay que buscar un polinomio $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r$ tal que $P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_r A^r$ sea la matriz nula.

Empecemos suponiendo que $P(t)$ es un polinomio de primer grado: $a_0 + a_1 t$ y planteemos $P(A) = a_0 I + a_1 A = 0$ es decir

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 0 \\ a_1 & 2a_1 & 2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + 2a_1 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o sea} \quad a_0 = a_1 = 0$$

Esto nos dice que no puede formarse la matriz nula por combinación lineal no nula de I y A por lo que $P(t)$ no puede ser de primer grado.

Intentemos ahora con un polinomio de segundo grado $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y calculemos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica

$$\left.\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 0 \\ a_1 + 4a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow a_0 = -a_1 = 4a_2$$

Puede tomarse $a_0 = 4$, $a_1 = -4$, $a_2 = 1$, para tener $P(t)$ normalizado, por lo que

$$P(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

2. Sabiendo que un endomorfismo f de $\mathbf{R}^{11}$ tiene $(t+1)^2(t-4)^3(t+2)^6$ como polinomio característico y $(t+1)^2(t-4)(t+2)^3$ como polinomio anulador. ¿Cuáles son sus posibles formas de Jordan?

Solución:

De:

$$\begin{aligned} Q(t) &= (t+1)^2(t-4)^3(t+2)^6 \\ P(t) &= (t+1)^2(t-4)(t+2)^3 \end{aligned}$$

Se tiene la $1^{\underline{a}}$ descomposición:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{11} &= Ker(f+I)^2 \oplus Ker(f-4I) \oplus Ker(f+2I)^3 \\ &= E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \end{aligned}$$

Pasemos a la descomposición de los E_i en monógenos; el polinomio anulador de E_1 es $(t+1)^2$, luego la dimensión del monógeno mayor es 2 y coincide con el polinomio característico $(t+1)^2$, que nos dice que $dim\ E_1 = 2$, luego en E_1 hay un solo monógeno $E_1 = E_{11}$, y la matriz de f restringida a E_1 es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio anulador de E_2 es $(t-4)$, luego f restringido a E_2 diagonaliza, ya que la dimensión del monógeno mayor es 1 , y puesto que el polinomio característico restringido a E_2 es $(t-4)^3$, se tiene que la dimensión de E_2 es 3 , por lo que hay tres monógenos en E_2 de dimensión 1 y es $E_2 = E_{21} \oplus E_{22} \oplus E_{23}$ y la matriz de f restringida a E_2 es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El polinomio anulador de E_3 es $(t+2)^3$, luego la dimensión del monógeno mayor es 3 y puesto que el polinomio característico de E_3 es $(t+1)^6$, la dimensión de E_3 es 6 , luego no tenemos unívocamente determinada la descomposición de E_3 .

Las posibilidades son:

a) $E_{31} \oplus E_{32}$ con $dim\ E_{31} = dimE_{32} = 3$

b) $E_{31} \oplus E_{32} \oplus E_{33}$ con $dimE_{31} = 3$, $dimE_{32} = 2$ y $dimE_{33} = 1$

c) $E_{31} \oplus E_{32} \oplus E_{33} \oplus E_{34}$ con $dimE_{31} = 3$, $dimE_{32} = dimE_{33} = dimE_{34} = 1$.

Y la matriz f restringida a E_3 es

$$a)\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ & & & -2 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ & & & -2 & 0 & \\ & & & 1 & -2 & \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ & & & -2 & & \\ & & & & -2 & \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

luego, las posibles formas de Jordan, son

$$a)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & & & \\ & & & & & & & & -2 & & \\ & & & & & & & & 1 & -2 & \\ & & & & & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & & & \\ & & & & & & & & -2 & & \\ & & & & & & & & 1 & -2 & \\ & & & & & & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & 1 & -2 & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & & & \\ & & & & & & & & -2 & & \\ & & & & & & & & & -2 & \\ & & & & & & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

3. ¿Es la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & & & & & \\ 1 & 3 & & & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & 1 & 3 & & & \\ & & & & 2 & 0 & \\ & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

reducida de Jordan de algún endomorfismo?

Solución:

Si lo fuese el polinomio anulador sería

$$P(t) \;=\; (-2-3t+t^2)(t-2)^2$$

$(-2-3t+t^2)$ es el polinomio anulador de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pero $-2-3t+t^2$ no es primo:

$$(-2-3t+t^2) = (t-\frac{3+\sqrt{17}}{2})(t-\frac{3-\sqrt{17}}{2})$$

luego la matriz anterior no puede ser reducida de Jordan.

4. Hallar la forma reducida de Jordan del endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ cuya matriz en la base natural es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Hallemos el polinomio característico:

$$det(A - tI) = t^4$$

(Obvio ya que la matriz es triangular).

$$dim\ Ker(A - 0I) = 4 - rango\, A = 4 - 3 = 1 \text{ (no diagonaliza, pues } 1 \neq 4)$$

$$dim\ Ker(A - 0I)^2 = 4 - rango\, A^2 = 4 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$dim\ Ker(A - 0I)^3 = 4 - rango\, A^3 = 4 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$dim\ Ker(A - 0I)^4 = 4 - rango\, A^4 = 4 - rango\, 0 = 4$$

Luego, tenemos

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 1\} = dim\ Ker\ f = 1$

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 2\} = dim\ Ker\ f^2 - dim\ Ker\ f = 1$

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 3\} = dim\ Ker\ f^3 - dim\ Ker\ f^2 = 1$

$\{$nº de subespacios de $dim \geq 4\} = dim\ Ker\ f^4 - dim\ Ker\ f^3 = 1$

luego hay un solo subespacio irreducible de $dim\ 4$ y la matriz reducida es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: esto ya se podía preveer, puesto que al ser

$$dim\ Ker(A - 0I) = dim\ Ker\ f = 1$$

el subespacio de vectores propios correspondiente al valor propio cero es de dim 1 y en cada subespacio monógeno hay un subespacio de dim 1 invariante, luego solo puede haber un monógeno.

5. Dado el endomorfismo de $\mathbf{R}^5$ cuya matriz en la base natural viene dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar:

a) polinomios característico y anulador

b) los subespacios monógenos correspondientes

c) una base de estos subespacios monógenos, diciendo qué vectores son

propios y escribir en esta base la matriz del endomorfismo.

Solución:

a) Polinomio característico

$$Q(t) = det(A - tI) = -(t-2)^5$$

veamos el anulador:

$$dim\ Ker(A - 2I) = 5 - rango(A - 2I) = 5 - 3 = 2$$

(por ser de dimensión dos habrá dos vectores propios linealmente independientes, con valor propio dos. Por tanto, como en cada subespacio monógeno hay un vector propio, habrá dos subespacios monógenos)

$$\begin{aligned} dim\ Ker(A - 2I)^2 &= 5 - rango(A - 2I)^2) = 5 - 1 = 4 \\ dim\ Ker(A - 2I)^3 &= 5 - rango(A - 2I)^3 = 5 \end{aligned}$$

luego $(t-2)^3$ anula a todo el espacio, luego al polinomio anulador es:

$$P(t) = (t-2)^3$$

b) Por ser $dim\ Ker(A - 2I) = 2$, hay dos monógenos de $dim \geq 1$

$dim\ Ker(A-2I)^2 - dim\ Ker(A-2I) = 4-2 = 2$, hay dos monógenos de $dim \geq 2$

$dim\ Ker(A-2I)^3 - dim\ Ker(A-2I)^2 = 5-4 = 1$, hay un monógeno de $dim \geq 3$.

luego, hay un monógeno de $dim\, 3$, y un monógeno de $dim\, 2$

c) Hallemos una base del primer monógeno $\{u_1, u_2, u_3\}$

$u_1 \in Ker(A-2I)^3 = \mathbf{R}^5$, luego u_1 puede ser cualquier vector tal que $(A-2I)^2u_1 \neq 0$ y puesto que

$$Ker(A-2I)^2 = \{(x,y,z,t,k)/\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}k = 0\}$$

Podemos tomar por ejemplo $u_1 = (0,0,1,1,0)$, entonces

$$\begin{aligned} u_2 &= (A-2I)u_1 = (0,0,0,1,1) \\ u_3 &= (A-2I)^2u_1 = (A-2I)u_2 = (1,0,0,0,1) \end{aligned}$$

y u_3 es vector propio ($(A-2I)u_3 = (A-2I)^3 u_1 = 0u_1 = 0$).

Hallemos ahora una base del segundo monógeno $u_4,\ u_5$:

$u_4 \in Ker(A-2I)^2$ y $u_4 \notin Ker(A-2I)$

$$\begin{aligned} Ker(A-2I)^2 &= \{(x,y,z,t,k)/\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}k = 0\} \\ Ker(A-2I) &= \{(x,y,z,t,k)/-x+y-z+t+k=0, x+y-z+t-k=0, \\ &\qquad x-y+z+t-k=0, y=0\} \end{aligned}$$

Observamos que $u_2 \in Ker(A-2I)^2$, $u_2 \notin Ker(A-2I)$, luego tenemos que tomar la precaución de elegir u_4 de forma que $u_4,\ (A-2I)u_4 = u_5$ sean linealmente independientes de $u_2,\ u_3$.

Sea pues

$$u_4 = (1,1,0,0,0)$$

y por lo tanto

$$u_5 = (A-2I)u_4 = (0,1,1,0,0)$$

y u_5 es vector propio.

Vayamos a determinar la matriz de f en la base $\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5\}$:

$$\begin{aligned} &(A-2I)u_1 = u_2 \Rightarrow Au_1 - 2u_1 = u_2 \Rightarrow Au_1 = 2u_1 + u_2 \\ &(A-2I)u_2 = u_3 \Rightarrow Au_1 - 2u_2 = u_3 \Rightarrow Au_2 = 2u_2 + u_3 \\ &(A-2I)u_3 = 0 \Rightarrow Au_3 - 2u_3 = 0 \Rightarrow Au_3 = 2u_3 \\ &(A-2I)u_4 = u_5 \Rightarrow Au_4 - 2u_4 = u_5 \Rightarrow Au_4 = 2u_4 + u_5 \\ &(A-2I)u_5 = 0 \Rightarrow Au_5 - 2u_5 = 0 \Rightarrow Au_5 = 2u_5 \end{aligned}$$

luego, la matriz es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y claramente $J = S^{-1}AS$, donde

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sea $f \in End(\mathbf{R}^3)$ cuya matriz en la base natural es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea $g \in End(\mathbf{R}^3)$ cuya matriz en una cierta base: $B = \{v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\}$ es

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Pueden ser f y g el mismo endomorfismo?

Solución:

Para que A_1 y A_2 puedan representar el mismo endomorfismo ha de existir una matriz S tal que $S^{-1}A_1S = A_2$

Veamos cómo podemos determinar dicha matriz: busquemos (si existen) las formas reducidas de Jordan de f y g . Si son el mismo endomorfismo, coincidirán y tendremos

$$A_1 = S_1^{-1} J S_1 \qquad A_2 = S_2^{-1} J S_2$$

con lo cual tendremos

$$\left.\begin{aligned} S_1 A_1 S_1^{-1} &= J \\ S_2 A_2 S_2^{-1} &= J \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow S_1 A_1 S_1^{-1} = S_2 A_2 S_2^{-1} \quad \Rightarrow (S_1^{-1} S_2)^{-1} A_1 (S_1^{-1} S_2) = A_2$$

y $S = S_1^{-1} S_2$ es la matriz buscada ya que se verifica: $S^{-1} A_1 S = A_2$

Estudiemos pues A_1

$$\begin{aligned} &det(A_1 - tI) = -(t-1)^3 \\ &dim\ Ker(A_1 - I) = 1 \end{aligned}$$

luego hay un solo monógeno y J será

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la base de Jordan es

$$\begin{aligned} &w_1 \in Ker(A_1 - I)^3 = \mathbf{R}^3 \quad w_1 \notin Ker(A_1 - I)^2, \quad \text{por ejemplo} \quad w_1 = (0,1,0) \\ &w_2 = (A_1 - I) w_1 = (\frac{1}{2}, 0, 1) \\ &w_3 = (A_1 - I)_2 w_1 = (A - I) w_2 = (1,0,0) \end{aligned}$$

$$\text{y} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasemos a estudiar, ahora, A_2

$$\begin{aligned} det(A_2 - tI) &= -(t-1)^3 \\ dim\, Ker(A_2 - I) &= 1 \end{aligned}$$

luego hay un solo monógeno y

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la base de Jordan es

$$\begin{aligned} &u_1 \in Ker(A_2 - I)^3 = \mathbf{R}^3,\ u_1 \notin Ker(A_2 - I)^2, \text{ por ejemplo } u_1 = (8, -5, 10) \\ &u_2 = (A_2 - I)u_1 = (1, -1, 1) \\ &u_3 = (A_2 - I)^2 u_1 = (A_2 - I)u_2 = (-3, 2, -4) \end{aligned}$$

$$\text{y} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto:

$$S = S_1^{-1} S_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Sea $f = (D + I) : P_2(\mathbf{R}) \longrightarrow P_2(\mathbf{R})$ donde $P_2(\mathbf{R})$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos a coeficientes reales y D es la aplicación derivada;

a) determinar la forma reducida de Jordan así como la base para la cual la matriz adopta dicha forma

b) probar que f^{-1} es un polinomio en f y utilizar dicho resultado para determinar la matriz de f^{-1} en la base natural $\{x^2, x, 1\}$.

Solución:

a) En la base $\{x^2, x, 1\}$, la matriz de f adopta la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - tI) &= -(t-1)^3 \\ dimKer(A - I) &= 3 - rango(A - I) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

luego hay un solo monógeno y la matriz reducida de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan:

$$\begin{aligned} &v_1 \in Ker(A-I)^3 = \mathbf{R}^3; \quad v_1 \notin Ker(A-I)^2 = \{(x,y,z)/x = 0\} \\ &v_1 = (1,0,0) \\ &v_2 = (A-I)v_1 = (0,2,0) \\ &v_3 = (A-I)^2 v_1 = (A-I)v_2 = (0,0,2) \end{aligned}$$

luego la base es $\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,2)\}$.

b) El polinomio anulador de f es $(t-1)^3$, luego

$$(f - I)^3 = 0 \Leftrightarrow f^3 - 3f^2 + 3f - I = 0$$

luego

$$I = f^3 - 3f^2 + 3f = f(f^2 - 3f + 3I) = (f^2 - 3f + 3I)f$$

por lo que

$$f^{-1} = f^2 - 3f + 3I$$

Y la matriz A^{-1} es:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Hallar la forma normal de Jordan del endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallando la base de $\mathbf{R}^4$ en la cual la matriz del endomorfismo adopta dicha forma normal.

Solución:

Calculemos los polinomios característico y anulador de A

$$\begin{aligned} det(A - tI) &= det(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - tI_2)det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - tI_2) = \\ &= (t-1)^4 \\ dim\ Ker(A - tI) &= 4 - rango(A - I) = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

luego hay dos monógenos

$$dim\ Ker(A-I)^2 = 4 - rango(A-I)^2 = 4-0=4=dim\ \mathbf{R}^4$$

luego son dos monógenos de $dim\ 2$ y la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y $\mathbf{R}^4 = E_1 \oplus E_2$ con $dim\ E_i = 2$ para $i=1,2$

Busquemos la base de Jordan:

base de E_1:

$$\begin{aligned} &v_1 \in Ker(A-I)^2, \quad v_1 \notin Ker(A-I) \\ &v_1 = (1,0,0,0) \\ &v_2 = (A-I)v_1 = (2,-4,7,-17); \end{aligned}$$

base de E_2:

$$\begin{aligned} &v_3 \in Ker(A-I)^2, \quad v_3 \notin Ker(A-I) \\ &v_3 = (0,1,0,0) \\ &v_4 = (A-I)v_3 = (1,-2,1,-6) \end{aligned}$$

hay que tomar la precaución de que v_3, v_4 sean linealmente independientes de v_1, v_2.

9. Determinar la forma reducida de Jordan del endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz en la base natural es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{R}$$

Solución:

Busquemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} det(A-tI) &= -(t-1)^2(t-2) \\ dim\ Ker(A-I) &= \begin{cases} 2 & a=0 \\ 1 & a\neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para $a=0$ f diagonaliza, y D es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para $a\neq 0$ el valor propio 1 nos da un único subespacio monógeno, y J es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan: distinguiremos dos casos

1) $a=0$

$$v_1, \quad v_2 \in Ker(A-I) = \{(x,y,z)/x+z=0\}$$

elegimos $v_1=(1,0,-1)$, $v_2=(0,1,0)$

$$v_3 \in Ker(A-2I) = \{(x,y,z)/x=0,\ y+z=0\}$$

elegimos $v_3=(0,1,-1)$.

2) $a\neq 0$

$$\begin{aligned} v_1 &\in Ker(A-I)^2 = \{(x,y,z)/x+ay+(a+1)z=0\} \\ v_1 &\notin Ker(A-I) = \{(x,y,z)/ay+az=0, \quad x+z=0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{elegimos}\quad v_1 &= (a,-1,0)\\ v_2 &= (A-I)v_1 = (-a,-a,a)\\ v_3 &\in Ker(A-2I)\\ v_3 &= (0,1,-1) \end{aligned}$$

10. Sea $A \in M_n(\mathbf{R})$ y sea H el $\mathbf{R}$-espacio vectorial generado por las matrices

$$\{I,\ A,\ A^2, \cdots,\ A^{n-1}\}$$

a) Demostrar que si $B \in H$ y B es inversible, entonces $B^{-1} \in H$.

b) Si $detA = 0$, probar que existe $B \in H,\quad B \neq 0$ tal que $AB = BA = 0$.

Solución:

a) Por el teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que el polinomio característico $\lambda^n + \lambda_1\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_n$ anula a la matriz:

$$A^n + \lambda_1 A^{n-1} + \cdots + \lambda_n I = 0$$

por lo que $A^n = \sum_{i=1}^n -\lambda_i A^{n-i} \in H$, con lo cual $A^m \in H\, \forall m \geq n$, y tiene sentido la aplicación:

$$\begin{aligned} f: H &\longrightarrow H\\ C &\longrightarrow B\cdot C \end{aligned}$$

f es lineal, pues

$$\begin{aligned} f(C_1+C_2) = B(C_1+C_2) = BC_1 + BC_2 = f(C_1)+f(C_2)\\ f(\lambda C) = B\cdot(\lambda C) = \lambda B\cdot C = \lambda f(C) \end{aligned}$$

f es inyectiva, pues si $BC_1 = BC_2$, al ser B inversible, tenemos $B^{-1}(BC_1) = B^{-1}(BC_2)$ y por tanto, $C_1 = C_2$, y puesto que H es de dimensión finita f es biyectiva, luego $I \in H$ tiene antiimagen por la aplicación f; es decir, existe $C \in H$ tal que $f(C) = B \cdot C = I$, luego $C = B^{-1} \in H$

Nota: puesto que las matrices son de orden finito de $B \cdot C = I$, deducimos $C = B^{-1}$. Si fueran de orden infinito, podría ser que $B \cdot C = I$, pero $C \cdot B \neq I$.

b) Supongamos $A \neq 0$; sea $p(\lambda)$ el polinomio anulador de A tenemos que $p(A) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i A^i = 0$ y puesto que $detA = 0$ es $\lambda_0 = 0$ (ya que el polinomio anulador divide al característico y tiene sus mismas raíces), luego

$$\lambda_1 A + \cdots + \lambda_r A^r = 0$$

y sea pues $B = \lambda_1 I + \cdots + \lambda_r A^{r-1}$

B es distinta de cero, ya que si $B = 0$ el polinomio anulador de A sería $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r x^{r-1}$

Si $A = 0$, entonces $\forall B \in H$, tenemos $AB = BA = 0$

Capítulo 8 Análisis matricial

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular e^A, e^{tA}.

b) Utilizar dicho resultado para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales :

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4z \\ y' = 2x + 2z \\ z' = 4x + 2y + 3z \end{cases}$$

sabiendo que para $t = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Solución:

a) La exponencial de una matriz viene definida por:

$$e^A = \lim_{p\to\infty} (I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots \frac{1}{p!}A^p)$$

Puesto que existe S tal que $A = SDS^{-1}$, con D matriz diagonal, tenemos que:

$$\begin{aligned} e^A &= \lim_{p\to\infty}(SS^{-1}+SDS^{-1}+\frac{1}{2!}SD^2S^{-1}+\cdots+\frac{1}{p!}SD^pS^{-1}) = \\ &= S\lim_{p\to\infty}(I+D+\frac{1}{2!}D^2+\cdots\frac{1}{p!}D^p)S^{-1} \\ &= Se^DS^{-1} \end{aligned}$$

veamos que en efecto existen las matrices S y D

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= -(\lambda+1)^2(\lambda-8) \\ dim\ ker(A+I) &= 2 \end{aligned}$$

luego

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

determinemos S

$\{v_1\,,v_2\}$ base de $ker(A+I)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 2x+y+2z=0 \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{matrix} v_1 = (1,0,-1) \\ v_2 = (0,2,-1) \end{matrix}\right\}$$

$v_3 \in ker(A-8I)$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5x+2y+4z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad v_3 = (2,1,2)$$

de donde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$e^D = \lim_{p\to\infty}\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} (-1)^2 & & \\ & (-1)^2 & \\ & & (8)^2 \end{pmatrix} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \frac{1}{p!}\begin{pmatrix} (-1)^p & & \\ & (-1)^p & \\ & & (8)^p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{-1} & & \\ & e^{-1} & \\ & & e^8 \end{pmatrix}$$

y

$$e^A = Se^DS^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5e^{-1}+4e^8 & -2e^{-1}+2e^8 & -4e^{-1}+4e^8 \\ -2e^{-1}+2e^8 & 8e^{-1}+e^8 & -2e^{-1}+2e^8 \\ -4e^{-1}+4e^8 & -2e^{-1}+2e^8 & 5e^{-1}+4e^8 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \lim_{p\to\infty}(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{p!}t^pA^p) = Se^{tD}S^{-1}$$

y

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{8t} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$e^{tA} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5e^{-t}+4e^{8t} & -2e^{-t}+2e^{8t} & -4e^{-t}+4e^{8t} \\ -2e^{-t}+2e^{8t} & 8e^{-t}+e^{8t} & -2e^{-t}+2e^{8t} \\ -4e^{-t}+4e^{8t} & -2e^{t}+2e^{8t} & 5e^{-t}+4e^{8t} \end{pmatrix}$$

b) Pasemos a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$X(t) = e^{tA}X(0) \quad \text{con} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

por lo que

$$X(t) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -11e^{-t} + 20e^{8t} \\ 8e^{-t} + 10e^{8t} \\ 7e^{-t} + 20e^{8t} \end{pmatrix}$$

2. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y - 4z \\ \frac{dy}{dt} &= -y + 6z \\ \frac{dz}{dt} &= -y + 4z \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema puede expresarse matricialmente

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es decir, $\frac{dX}{dt} = AX$.

Intentaremos efectuar un cambio de base de modo que la nueva matriz $J = S^{-1}AS$ sea lo más sencilla posible. Así, si $X = SZ$, tenemos $\frac{dX}{dt} = S\frac{dZ}{dt}$ y la ecuación queda $S\frac{dZ}{dt} = SJS^{-1}SZ$, es decir $\frac{dZ}{dt} = JZ$.

Busquemos la forma reducida de Jordan de A

$$\begin{aligned} &det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \\ &dim\ ker(A-I) = 1 \end{aligned}$$

luego no diagonaliza y

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La base de Jordan es

$$\begin{aligned} &v_1 \in ker(A-I)^2 \quad v_1 \notin ker(A-I) \quad \text{sea pues} \quad v_1 = (1,3,1) \\ &v_2 = (A-I)(v_1) = (2,0,0) \\ &v_3 \in ker(A-2I) \quad \text{sea pues} \quad v_3 = (0,2,1) \end{aligned}$$

y la matriz S es

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema queda

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \\ \frac{dz_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

cuya solución es:

$$\left.\begin{aligned} &z_1 = C_1 e^t \\ &z_2 = (C_1 t + C_2) e^t \\ &z_3 = C_3 e^{2t} \end{aligned}\right\}$$

que volviendo a la base natural

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ (C_1 t + C_2)e^t \\ C_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x &= (2C_1 t + C_1 + 2C_2)e^t \\ y &= 3C_1 e^t + 2C_3 e^{2t} \\ z &= C_1 e^t + C_3 e^{2t} \end{aligned}\right\}$$

3. Sea f un endomorfismo del $\mathbf{R}$-espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ tal que su matriz en la base natural es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & -4 & -4 \\ 30 & 25 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la forma reducida de Jordan de f y la base de Jordan correspondiente.

b) Calcular e^{3A} .

Solución:

a) Determinemos la forma reducida de A

$$\begin{aligned} &det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)3(\lambda - 1) \\ &dim\ ker(A + I) = 2 \end{aligned}$$

luego no diagonaliza, y el valor propio -1 nos proporciona dos monógenos y la matriz de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan

$$
\begin{array}{l}
v_1 \in ker(A+I)^2\,,\, v_1 \notin ker(A+I)\,,\, v_1 = (1,0,0,0)\\
v_2 = (A+I)v_1 = (0,12,30,0)\\
v_3 \in ker(A+I) \quad \text{independiente con} \quad v_2, \quad \text{sea} \quad v_3 = (1,0,3,0)\\
v_4 \in ker(A+I)\,,\, v_4 = (0,1,1,1)
\end{array}
$$

y la matriz cambio de base es

$$
S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 1\\ 0 & 30 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 10 & -4 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -10 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}
$$

b) $e^{3A} = e^{3SJS^{-1}} = Se^{3J}S^{-1}$

$$
e^{3J} = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 & 0 & 0\\ 3e^{-3} & e^{-3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{3} \end{pmatrix}
$$

luego

$$
e^{3A} = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 & 0 & 0\\ 36e^{-3} & 31e^{-3} & -12e^{-3} & -19e^{-3}+e^{3}\\ 90e^{-3} & 75e^{-3} & -29e^{-3} & -46e^{-3}+e^{3}\\ 0 & 0 & 0 & e^{3} \end{pmatrix}
$$

4. Determinar las funciones reales de una variable $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$ tales que verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$
\left.\begin{array}{l}
x' = x - z + u\\
y' = y + z\\
z' = z\\
u' = u
\end{array}\right\}
$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, $u(0) = 2$.

Solución:

Escribiendo el sistema dado en forma matricial $AX = X'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ u' \end{pmatrix}$$

Busquemos la forma reducida de Jordan de la matriz A para simplificar el problema

$$det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^4$$
$$dim\ ker(A - I) = 2$$

luego hay dos monógenos

$$dim\ ker(A - I)^2 = 4$$

luego ambos monógenos son de dimensión dos, por lo que la matriz de Jordan adopta la forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de Jordan

$$e_1\,,\ e_3 \in ker(A - I)^2\,, \quad e_1,\ e_3 \notin ker(A - I)$$
$$e_2 = (A - I)e_1\,, \quad e_4 = (A - I)e_3\,,$$

de manera que e_1, e_2, e_3, e_4 sean independientes.

Sea pues

$$e_1 = (0,0,1,0) \Rightarrow e_2 = (-1,1,0,0)$$
$$e_3 = (0,0,0,1) \Rightarrow e_4 = (1,0,0,0)$$

luego

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$e^{tA} = e^{tSJS^{-1}} = Se^{tJ}S^{-1}$

$$e^{tJ} = e_t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & te^t & e^t \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & -te^t & te^t \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Hallar:

$$I+A+A^2+\cdots+A^n+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

Solución:

Busquemos, para obtener de forma sencilla A^n , la forma reducida de Jordan de la matriz A

$$det(A-\lambda I) = (\lambda-\frac{1}{2})(\lambda+\frac{1}{3})$$

luego A diagonaliza

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y la matriz cambio de base es:

$$\begin{aligned} v_1 &\in ker(A-\frac{1}{2}I)\,, \quad v_1 = (1,3) \\ v_2 &\in ker(A+\frac{1}{3}I)\,, \quad v_2 = (-1,2) \end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= SD^nS^{-1} = S\begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & \\ & (-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(\frac{1}{2})^n + \frac{3}{5}(\frac{1}{3})^n & \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{5}(\frac{1}{3})^n \\ \frac{6}{5}(\frac{1}{2})^n - \frac{6}{5}(-\frac{1}{3})^n & \frac{3}{5}(\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n & \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n \\ \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n - \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n & \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 2$ (es la suma de los términos de una progresión geométrica de primer término 1 y razón $\frac{1}{2} < 1$).

$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n = \frac{3}{4}$ (es la suma de los términos de una progresión geométrica de primer término 1 y razón $-\frac{1}{3}$, $|-\frac{1}{3}| < 1$).

Por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{5}{4}\\
\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{1}{4}\\
\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n - \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{3}{2}\\
\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular $senA$.

Solución:

Por definición:

$$sen A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Determinemos la forma reducida de Jordan de A

$$\begin{array}{l} det(A-\lambda I) = -(\lambda+I)^2+(\lambda-2) \\ dim\ ker(A+I) = 2 \end{array}$$

luego A diagonaliza.

La matriz cambio de base es

$v_1, v_2 \in ker(A+I)$ independientes $v_3 \in ker(A-I)$ sean pues

$$\begin{aligned} v_1 &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ v_2 &= (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{2}) \\ v_3 &= (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \end{aligned}$$

luego

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$sen\, A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n S D^{2n+1} S^{-1}}{(2n+1)!} = S(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D^{2n+1}}{(2n+1)!})S^{-1} =$$

$$= S \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-1)^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-1)^{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2)^{2n+1} \end{pmatrix} S^{-1} =$$

$$= S\begin{pmatrix} sen(-1) & 0 & 0 \\ 0 & sen(-1) & 0 \\ 0 & 0 & sen(2) \end{pmatrix} S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}sen(-1) & -\frac{1}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) & -\frac{1}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) \\ -\frac{1}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) & \frac{2}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) & -\frac{1}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) \\ -\frac{1}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) & -\frac{1}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) & \frac{2}{3}sen(-1)+\frac{1}{3}sen(2) \end{pmatrix}$$

Apéndice I Grupos

1. Consideremos el subconjunto $GL_2(\mathbf{R})$ de $M_2(\mathbf{R})$ definido por

$$GL_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

a) Probar que $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ es un grupo no conmutativo, ($\cdot$ es el producto habitual entre matrices).

b) Consideremos el subconjunto $SL_2(\mathbf{R})$ de $M_2(\mathbf{R})$ definido por

$$SL_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Probar que $(SL_2(\mathbf{R}), \cdot)$ es un subgrupo del grupo $(GL_2(\mathbf{R}), \cdot)$.

Solución:

a) Primero veamos que la operación está bien definida, es decir dadas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbf{R})$ entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbf{R})$$

para ello basta calcular $a_2d_2 - b_2c_2$

$$\begin{aligned} a_2d_2 - b_2c_2 &= (aa_1 + bc_1)(cb_1 + dd_1) - (ca_1 + bc_1)(ab_1 + bd_1) = \\ &= (ad - bc)(a_1d_1 - b_1c_1) \neq 0 \end{aligned}$$

Veamos que se verifican las propiedades de grupo y que falla la conmutatividad

Asociatividad

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} (aa_1 + bc_1)a_2 + (ab_1 + bd_1)c_2 & (aa_1 + bc_1)b_2 + (ab_1 + bd_1)d_2 \\ (ca_1 + dc_1)a_2 + (cb_1 + dd_1)c_2 & (ca_1 + dc_1)b_2 + (cb_1 + dd_1)d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} a(a_1a_2 + b_1c_2) + b(c_1a_2 + d_1c_2) & a(a_1b_2 + b_1d_2) + d(c_1b_2 + d_1d_2) \\ c(a_1a_2 + b_1c_2) + d(c_1a_2 + d_1c_2) & c(a_1b_2 + b_1d_2) + d(c_1b_2 + d_1d_2) \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Existencia de elemento neutro

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$. $\exists \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y el elemento neutro es único: supongamos que existe un elemento $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbf{R})$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} \text{por ser } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ neutro } \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{por ser } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ neutro } \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Existencia de elemento simétrico

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R}) \quad ad - cb \neq 0$ luego $1/ad - bc \in \mathbf{R}$

Sea $\begin{pmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$ y es tal que:

$$\begin{pmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente para cada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$, el elemento simétrico es único. (¡Comprobarlo!)

Luego $GL_2(\mathbf{R})$ tiene estructura de *grupo*, veamos que no es abeliano.

Sean $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Sean $A, B \in Sl_2(\mathbf{R}) \subset GL_2(\mathbf{R})$ consideremos $B^{-1}A \in GL_2(\mathbf{R})$ y veamos si pertenece a $SL_2(\mathbf{R})$

$$det\,(B^{-1}A) = det\,B^{-1} det\,A = 1/det\,b \cdot det\,A = 1/1 \cdot 1 = 1$$

2. Sea G un grupo tal que para cada $x \in G, x^2 = e$, siendo e el elemento neutro del grupo G.

Probar que G es un grupo conmutativo.

Solución:

De $x^2 = e$ se tiene $x = x^{-1}$

Para todo par de elementos $x, y \in G$ se tiene $xy \in G$ luego

$$(xy)^2 = xyxy = e$$

premultiplicando dicha igualdad por x y postmultiplicando por y tenemos

$$\begin{aligned} xyxy &= e \\ xxyxyy &= xey \\ eyxe &= xy \\ yx &= xy \end{aligned}$$

luego el grupo es conmutativo.

3. Encontrar todos los subgrupos normales de $\mathcal{S}_3$

Solución:

$\mathcal{S}_3 = \{i, g_1, g_2, s_1, s_2, s_3\}$ con

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Componiendo de todas las formas posibles estos elementos, de dos en dos, obtenemos la siguiente tabla

$\circ$	i	g_1	g_2	s_1	s_2	s_3
i	i	g_1	g_2	s_1	s_2	s_3
g_1	g_1	g_2	i	s_3	s_1	s_2
g_2	g_2	i	g_1	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	i	g_1	g_2
s_2	s_2	s_3	s_1	g_2	i	g_1
s_3	s_3	s_1	s_2	g_1	g_2	i

(Nota: en la tabla $x \circ y$ es x columna, y fila)

Teniendo en cuenta que

a) el grupo es de orden seis,

b) el orden de sus subgrupos ha de ser divisor de seis,

c) un subconjunto de un grupo finito es subgrupo si este es cerrado con respecto la operación,

simplemente observando la tabla anterior, vemos cuáles son los subgrupos de $\mathcal{S}_3$,

Subgrupos de orden 1: $\{i\}$

Subgrupos de orden 2: $\{i, s_1\}, \{i, s_2\}, \{i, s_3\}$

Subgrupos de orden 3: $\{i, g_1, g_2\}$

Subgrupos de orden 6: $\mathcal{S}_3$

Son subgrupos normales los subgrupos $\{i\}, \mathcal{S}_3$ (los impropios), así como el de índice dos, que puesto que el orden de S_3 es seis, éste es $\{i, g_1, g_2\}$. Analicemos si algún subgrupo de orden dos es normal, estudiemos por ejemplo $\{i, s_1\}$ (los otros dos se estudian de la misma forma).

Se trata de comparar $a \circ \{i, s_1\}$, con $\{i, s_1\} \circ a$ con $a \in S_3$ un elemento cualquiera:

sea $a = s_2$

$$\begin{aligned} s_2 \circ \{i, s_1\} &= \{s_2, g_1\} \\ \{i, s_1\} \circ s_2 &= \{s_2, g_2\} \end{aligned}$$

conjuntos distintos por lo que el subgrupo no es normal, (ninguno de los tres subgrupos de orden dos es normal).

4. Sea S un subgrupo de un grupo G y sea $x \in G$. Probar que

$$x^{-1}Sx = \{x^{-1}yx \mid \forall y \in S\}$$

es un subgrupo de G

Solución:

Sean $y_1, y_2 \in S$ entonces $x^{-1}y_1x$ y $x^{-1}y_2x$ son dos elementos de $x^{-1}Sx$, veamos si se verifica la condición de subgrupo:

$$(x^{-1}y_1x)(x^{-1}y_2x) = (x^{-1}y_1x)(x^{-1}y_2^{-1}x) = x^{-1}y_1(xx^{-1})y_2^{-1}x = x^{-1}y_1y_2^{-1}x$$

las igualdades anteriores son todas ellas ciertas puesto que x, y_1, y_2 son elementos de G que tiene estructura de grupo.

Ahora bien, por ser S subgrupo $y_1 y_2^{-1} = y_3 \in S$, luego

$$(x^{-1}y_1x)(x^{-1}y_2x)^{-1} = x^{-1}y_3x \in x^{-1}Sx$$

y por lo tanto $x^{-1}Sx$ es un subgrupo de G

5. Sea $A \in M_2(\mathbf{C})$ y sea $S = \{X \in GL_2(\mathbf{C}) \mid XA = AX\}$.

a) ¿Es S un subgrupo de $GL_2(\mathbf{C})$?.

b) Determinar S para el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Sean $X_1, X_2 \in S$ luego verifican $X_1A = AX_1$ y $X_2A = AX_2$

Para ver si se verifica $X_1X_2^{-1}A = AX_1X_2^{-1}$ (condición de subgrupo), veamos primero que, si $X_2 \in S$ entonces $X_2^{-1} \in S$.

En efecto: premultiplicando y postmultiplicando la igualdad $X_2A = AX_2$ por X_2^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} X_2^{-1}X_2AX_2^{-1} &= X_2^{-1}AX_2X_2^{-1} \\ AX_2^{-1} &= X_2^{-1}A \\ X_2^{-1}A &= AX_2^{-1} \end{aligned}$$

y finalmente

$$X_1X_2^{-1}A \underset{(a)}{=} X_1AX_2^{-1} \underset{(b)}{=} X_1AX_2^{-1}$$

(a) $X_2^{-1} \in S$

(b) $X_1 \in S$

Luego en efecto S es subgrupo.

b) Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in S$ entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 - x_4 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad x_1 = x_4 \qquad x_3 = 0 \\
&\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ahora bien $X \in GL_2(\mathbf{C})$ luego $x_1 \neq 0$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \mid x_1 \neq 0 \right\}$$

6. Probar que $(\mathbf{R}, *)$ con $a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ es un grupo isomorfo a $(\mathbf{R}, +)$.

Solución:

Veamos que $(\mathbf{R}, *)$ es un grupo abeliano.

1) La operación está bien definida ($a * b$ existe para todo $a, b \in \mathbf{R}$ y es único)

Asociatividad

$$
\begin{aligned}
(a * b) * c &= (\sqrt[3]{a^3 + b^3}) * c = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^3 + b^3})^3 + c^3} = \\
&= \sqrt[3]{(a^3 + b^3) + c^3} = \sqrt[3]{a^3 + (b^3 + c^3)} = \sqrt[3]{a^3 + (\sqrt[3]{b^3 + c^3})^3} = \\
&= a * (\sqrt[3]{b^3 + c^3}) = a * (b * c)
\end{aligned}
$$

Existencia de elemento neutro

Si $e \in \mathbf{R}$ es tal que $\forall a \in \mathbf{R}$

$$a * e = e * a = a$$

entonces

$$\sqrt[3]{a^3 + e^3} = a \quad \Rightarrow \quad a^3 + e^3 = a^3 \quad \Rightarrow \quad e^3 = 0$$

por lo tanto $e = 0$ y evidentemente es único

Existencia de elemento simétrico

Si para cada $a \in \mathbf{R}$ existe $a_1 \in \mathbf{R}$ tal que

$$a * a^{-1} = a_1 * a = 0$$

entonces

$$0 = \sqrt[3]{a^3 + a_1^3} \quad \Rightarrow \quad a^3 = -a_1^3 \quad \Rightarrow \quad a = a_1$$

luego el elemento simétrico existe y es único

Conmutatividad

$$a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3} = \sqrt[3]{b^3 + a^3} = b * a$$

Luego en efecto es grupo abeliano, establezcamos ahora el isomorfismo con $(\mathbf{R}, +)$

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbf{R}, *) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, +) \\ a & \longrightarrow & \varphi(a) = a^3 \end{array}$$

Dicha aplicación está bien definida ya que $\varphi(a)$ es un número real único, para cada $a \in \mathbf{R}$.

Es inyectiva pues $\varphi(a) = \varphi(b) \quad \Rightarrow \quad a^3 = b^3$ lo que implica $a = b$

Es además exhaustiva pues $\forall a \in \mathbf{R}$ existe $\sqrt[3]{a}$ tal que $\varphi(\sqrt[3]{a}) = a$

Esta aplicación es morfismo de grupos, ya que

$$\varphi(a * b) = \varphi(\sqrt[3]{a^3 + b^3}) = (\sqrt[3]{a^3 + b^3})^3 = a^3 + b^3 = \varphi(a) + \varphi(b)$$

por lo que φ es un isomorfismo.

7. Sea G un grupo. Probar que si existe un número entero n tal que $(ab)^n = a^n b^n$ para todo $a, b \in G$ entonces

$$G^n = \{x^n \mid x \in G\} \qquad \text{y} \qquad G_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$$

son subgrupos normales de G, y si G es un grupo finito entonces el orden de G^n coincide con el índice de G_n

Solución:

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow x^n \end{aligned}$$

y comprobemos que es morfismo de grupos

$$\varphi(ab) = (ab)^n \underset{(a)}{=} a^n b^n = \varphi(a)\varphi(b)$$

(a) por hipótesis

$Ker\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e\} = G_n$ luego G_n es subgrupo normal de G

$Im\varphi = \{y \in G \mid \exists x \in G \text{ tal que } \varphi(x) = y\} = \{x^n \mid x \in G\} = G^n$ luego G^n es un subgrupo de G, veamos que tambien es normal

$$\forall y \in G \quad yx^ny^{-1} = (yxy^{-1})^n \in G^n$$

Y por último $\varphi(G) = G^n \simeq G/G_n$, por lo que

$$ord\, G^n = ind\, G_n$$

8. Probar que un grupo $(G, \cdot)$ es abeliano si y sólo si la aplicación $\varphi : G \longrightarrow G$ definida por $\varphi(x) = x^{-1}$ es un automorfismo de G.

Solución:

La aplicación φ está bien definida puesto que cada elemento de G admite un inverso y este es único.

Supongamos ahora que φ es un automorfismo

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \qquad \forall a, b \in G$$

Por definición de φ tenemos

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \tag{1}$$

Por definición de elemento simétrico tenemos

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \tag{2}$$

que por (1) y (2)

$$\varphi(a \cdot b) = b^{-1} \cdot a^{-1} = \varphi(b) \cdot \varphi(a) = \varphi(b \cdot a)$$

y por ser φ automorfismo es

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Luego G es conmutativo.

Recíprocamente

La aplicación φ es biyectiva por ser G grupo (para cada elemento $a \in G$ existe simétrico y es único), veamos que el hecho de ser el grupo abeliano nos asegura que φ es morfismo

$$\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \underset{(a)}{=} a^{-1} \cdot b^{-1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

(a) hipótesis de conmutatividad

9. Sea G un grupo. Probar que el orden de un elemento $a \in G$ es el mismo que el orden de su inverso a^{-1}

Solución:

Sea $n = ord\, a$ el orden de $a \in G$ es decir $a^n = e$. Puesto que todo elemento $a \in G$ conmuta con su inverso a^{-1} y este es tal que $aa^{-1} = e$, se tiene

$$(aa^{-1})^n = e^n = e$$
$$(aa^{-1})^n = aa^{-1} \dots aa^{-1} = a^n (a^{-1})^n$$

y por lo tanto

$$a^n (a^{-1})^n = e$$

Ahora bien $a^n = e$ luego $(a^{-1})^n = e(a^{-1})^n = e$. Por lo tanto si m es el orden de a^{-1} se tiene que m es divisor de n.

Análogamente tenemos $(a^{-1}a)^m = e^m = e$ de donde

$$a^m = ea^m = (a^{-1})^m a^m = e$$

por lo que n es un divisor de n.

Finalmente si n es divisor de m y m es divisor de n es que $n = m$.

Apéndice II Anillos de clases de restos

1. Sea $\mathbf{Z}$ el anillo de los números enteros, un subconjunto, $I \subset \mathbf{Z}$, diremos que es un ideal si y solamente si

$$\left.\begin{array}{l}\forall x, y \in I \\ \forall x \in I,\ \forall a \in \mathbf{Z}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x - y \in I \\ a \cdot x \in I\end{array}\right\}$$

Probar que todos los ideales de $\mathbf{Z}$ son de la forma

$$I = (a) = \{a \cdot m \mid \forall m \in \mathbf{Z}\}.$$

Solución:

Sea, a, el menor entero positivo perteneciente a I, para todo $m \in I$, tenemos

$$m = a \cdot c + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < a$$

puesto que $a \in I$ se tiene que $a \cdot c \in I$ y por tanto $r = m - a \cdot c \in I$; r es positivo o nulo y por pertenecer a I ha de ser nulo, luego $m = a \cdot c$ es decir $I = (a)$; (estos ideales se llaman principales).

2. a) Probar que la intersección de dos ideales de $\mathbf{Z}$ es siempre un ideal.

b) Probar, con un ejemplo, que la unión de dos ideales de $\mathbf{Z}$ no tiene por qué ser un ideal.

Solución:

a) $(a) \cap (b) = I$

Sean $x, y \in I$; veamos si $x - y \in I$. De $x, y \in I$ se tiene

$$\begin{array}{lcl} x, y \in (a) & \text{de donde} & x - y \in (a) \\ x, y \in (b) & \text{de donde} & x - y \in (b) \end{array}$$

De $x - y \in (a)$, y $x - y \in (b)$ se tiene $x - y \in (a) \cap (b) = I$

Sean $x \in I$, $m \in \mathbf{Z}$; veamos si $m \cdot x \in I$.

De $x \in I$ se tiene

$$\begin{array}{lcl} x \in (a) & \text{luego} & m \cdot x \in (a) \\ x \in (b) & \text{luego} & m \cdot x \in (b) \end{array}$$

De $m \cdot x \in (a)$, y $m \cdot x \in (b)$ se tiene $m \cdot x \in I$

(b) Consideremos los ideales $I_1 = (3)$, $I_2 = (2)$ y sea $(3) \cup (2)$.

Tenemos que $9 \in (3)$, $4 \in (2)$ y $9 - 4 = 5 \notin (3) \cup (2)$ puesto que $5 \notin (3)$ y $5 \notin (2)$, luego $(3) \cup (2)$ no es ideal.

3. Probar que $mcd(a, b) = d$, siendo d el generador del ideal suma de los ideales de $\mathbf{Z}$ generados por a, b respectivamente.

Solución:

Recordemos que

$$I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$$

es siempre un ideal.

En $\mathbf{Z}$ sabemos que los ideales son principales, luego

$$(a) + (b) = (d).$$

Veamos que d es en efecto $mcd(a, b)$.

$(a) \subset (d)$ pues $\forall m \in (a)$ $m + 0 = m \in (a) + (b) = (d)$.

Por el mismo razonamiento $(b) \subset (d)$.

De $(a) \subset (d)$ tenemos que $a \in (d)$, luego $a = d \cdot k_1$

De $(b) \subset (d)$ tenemos que $b \in (d)$, luego $b = d \cdot k_2$

de donde d es divisor común de a, y b; falta ver que es el máximo.

De $(d) = (a) + (b)$ tenemos que $d \in (a) + (b)$; luego existen $m, n \in \mathbf{Z}$ tales que

$$a \cdot m + b \cdot n = d$$

por lo que si d_1 es divisor de a y b lo es de $a \cdot m + b \cdot n$, es decir, lo es de d, por lo que $mcd(a, b) = d$.

4. Probar que $mcm(a, b) = c$, siendo $c \in \mathbf{Z}$ el generador del ideal intersección de los ideales generados por $a, b \in \mathbf{Z}$.

Solución:

Tenemos, por hipótesis, que $(a) \cap (b) = (c)$; veamos que c = mcm(a,b).

$$\text{De} \quad (a) \cap (b) = (c) \quad \text{tenemos} \begin{cases} (c) \subset (a), & \text{luego } c \in (a) \\ (c) \subset (b), & \text{luego } c \in (b) \end{cases}$$

de donde

$$\begin{aligned} c &= a \cdot k_1 \quad \text{con} \quad k_1 \in \mathbf{Z} \\ c &= b \cdot k_2 \quad \text{con} \quad k_2 \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

luego c es múltiplo de a y b. Veamos que es el mínimo. Sea h un múltiplo de a y b cualquiera

$$\begin{aligned} h &= a \cdot h_1 \quad \text{de donde} \quad h \in (a) \\ h &= b \cdot h_2 \quad \text{de donde} \quad h \in (b) \end{aligned}$$

y por tanto, $h \in (a) \cap (b)$, es decir $h = c \cdot h_3$, es también múltiplo de c.

5. Probar que para que $\mathbf{Z}/(n)$ sea cuerpo, es condición necesaria y suficiente que n sea primo.

Solución:

Supongamos que $\mathbf{Z}/(n)$ es cuerpo, es decir $\forall \overline{a} \in \mathbf{Z}/(n)$, $\overline{a} \neq \overline{0}$, existe $\overline{b} \in \mathbf{Z}/(n)$ tal que $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$.

Si n no fuera primo, existirían $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$; ambos distintos de n, tales que $n_1 \cdot n_2 = n$; por lo tanto $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = \overline{n} = \overline{0}$.

Puesto que $\overline{n}_1 \neq \overline{0}$ y $\mathbf{Z}/(n)$ por hipótesis es cuerpo, existe $\overline{m}$ tal que $\overline{n}_1 \cdot \overline{m} = \overline{1}$, luego $\overline{0} = \overline{0} \cdot \overline{m} = \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 \cdot \overline{m} = \overline{n}_1 \cdot \overline{m} \cdot \overline{n}_2 = \overline{1} \cdot \overline{n}_2 = \overline{n}_2$, luego $n_2 = \dot{n}$ y puesto que $n_2 \mid n$, se tiene $n_2 = n$ *contradicción*; luego n ha de ser primo, y la condición es necesaria.

Veamos que es también suficiente:

Sea $\overline{0} \neq \overline{a} = \{m \cdot n + a, \forall m \in \mathbf{Z}, \text{con} 0 < a < n\}$. Puesto que n es primo, $mcd(a, n) = 1$; por lo que existen $r, s \in \mathbf{Z}$, tales que $a \cdot r + n \cdot s = 1$ (recordar que $(a) + (n) = (1)$); luego $\overline{a \cdot r + n \cdot s} = \overline{1}$, o sea, $\overline{a} \cdot \overline{r} + \overline{n} \cdot \overline{s} = \overline{1}$; Pero $\overline{n} = \overline{0}$, por lo tanto $\overline{a} \cdot \overline{r} = \overline{1}$ y $\mathbf{Z}/(n)$ es cuerpo.

6. Determinar todos los divisores de cero de

a) $\mathbf{Z}/(12)$; b) $\mathbf{Z}/(18)$; c) $\mathbf{Z}/(24)$.

Solución:

Un elemento $\overline{a} \in \mathbf{Z}/(n)$ con $\overline{a} \neq \overline{0}$ es un divisor de cero si y solamente si existe $\overline{b} \in \mathbf{Z}/(n)$, $\overline{b} \neq \overline{0}$ tal que

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$$

Observamos que si $\overline{a}$ es divisor de cero, también lo es $\overline{b}$, y $a \cdot b = \dot{n}$.

a) $12 = 2^2 \cdot 3$, luego los divisores de cero son $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$; es decir, las clases de resto de los divisores propios de 12 y de los elementos que tienen un factor que lo es de 12.

Observamos que $\overline{2} \cdot \overline{6} = \overline{0}$, $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{0}$, $\overline{3} \cdot \overline{8} = \overline{0}$, etc.

b) $18 = 2 \cdot 3^2$, luego los divisores de cero son $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, $\overline{12}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$, es decir, las clases de resto de los divisores propios de 18 y de los elementos que tienen un factor que lo es de 18 .

Observamos que $\overline{2} \cdot \overline{9} = \overline{0}$, $\overline{4} \cdot \overline{6} = \overline{0}$, $\overline{8} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} \cdot \overline{9} = \overline{0}$, etc.

c) $24 = 2^3 \cdot 3$, luego los divisores de cero son $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$, $\overline{10}$, $\overline{12}$, $\overline{14}$, $\overline{16}$, $\overline{18}$, $\overline{20}$, $\overline{22}$, $\overline{9}$, $\overline{15}$, $\overline{21}$, es decir, las clases de resto de los divisores propios de 24 y de los elementos que tienen un factor que lo es de 24.

Observamos que $\overline{2} \cdot 12 = \overline{0}$, $\overline{4} \cdot \overline{6} = \overline{0}$, $\overline{8} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, $\overline{21} \cdot \overline{8} = \overline{0}$, etc.

7. Escribir las tablas de sumar y multiplicar de $\mathbf{Z}/(4)$ y resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{array}\right\} \overset{(a)}{\Rightarrow} \quad 0x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

$$\overset{(b)}{\Rightarrow} \quad 2x + 3 \cdot 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3$$

no tiene solución pues no existe ningún elemento x en $\mathbf{Z}/(4)$ tal que $2 \cdot x = 3$. Obsérvese que 2 no es inversible en $\mathbf{Z}/(4)$ (es un divisor de cero)

(a) sumando ambas ecuaciones.

(b) sustituyendo el valor de x en la primera ecuación.

8. Escribir la tabla de sumar y multiplicar del cuerpo $\mathbf{Z}/(5)$ y resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} 2x+4y=2 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \stackrel{(b)}{\Rightarrow} 4x+0y=2$$

$$\Rightarrow \quad 4x=2 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

$$\stackrel{(c)}{\Rightarrow} \quad 2\cdot 3+y=0 \quad \Rightarrow \quad 1+y=0 \quad \Rightarrow \quad y=4$$

(a) multiplicando la primera ecuación por 2.

(b) sumando ambas ecuaciones.

(c) sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación.

9. Descomponer en fracciones simples, sobre $\mathbf{Z}/(5)$ la fracción racional siguiente

$$\frac{4}{x^2+4x+3}$$

Solución:

Hallemos primero las raíces del denominador, haciendo uso de las tablas del ejercicio anterior:

$$(x^2+4x+3)(4) = 1+1+3 = 0$$
$$(x^2+4x+3)(2) = 4+3+3 = 0$$

luego $x^2+4x+3 = (x-4)(x-2) = (x+1)(x+3)$, luego

$$\frac{4}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{4}{(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A+B}{(x+1)(x+3)}$$

Igualando numeradores tenemos

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ 3A+B=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A=2, \quad B=3$$